



TITLE:

過度現象に関する研究補遺(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

岩本, 國三

CITATION:

岩本, 國三. 過度現象に関する研究補遺. 京都大学, 1951, 工学博士

ISSUE DATE:

1951-04-18

URL:

<https://doi.org/10.14989/161912>

RIGHT:

過渡現象に関する研究補遺

京都大学工学部助手

若本國三

(電気工学教室)

過渡現象に関する研究補遺

岩 本 國 三

DOC

1950

6

電気系

目 次
第 0 章
總 說

0.1	總 說 (内容梗概)	1
0.2	謝 辞	2
0.3	主要記号表	3
0.4	術語表	5

第 I 編
過渡インピーダンスの測定
及其の応用に関する研究

第 I 章

インディシャル・インピーダンス及インピーダンス函数
測定法の概観

1.1	緒 言	9
1.2	稲田氏法及第一京大法	10
1.2.1	稲田氏法に依るインディシャル・インピーダンスの測定	10
1.2.2	第一京大法に依るインピーダンス函数の測定	10
1.3	第二京大法	12
1.3.1	原 理	12
1.3.2	特殊測定法	12
1.3.3	測定法の実際	14
1.4	第二京大法に依る測定例及インピーダンス函数の算定例	15
1.4.1	二次側抵抗負荷の柱上変圧器	15
1.4.2	二次側容量負荷の柱上変圧器	17
1.5	結 言	18

第 II 章

第二京大法に対する現象演算法の適用
及其の応用

2.1	緒 言	19
2.2	現象演算法の紹介	20
2.2.1	現象函数	20
2.2.2	現象演算法の記法	20
2.3	第二京大法の測定例及其の補正	22
2.3.1	補正の原理	22

2.3.2 感抗終端ケーブルの測定及補正例	23
2.3.3 感抗負荷せる変圧器の測定及補正例	24
2.3.4 容量負荷せる変圧器の測定及補正例	25
2.4 インピーダンス測定法をアドミッタンス, 電圧比, 電流比測定法へ拡張す	26
2.4.1 本節の目的	26
2.4.2 インディシャルアドミッタンスの算定法	26
2.4.3 電圧比, 電流比の算定法	28
2.5 電圧, 電流測定を基としたインディシャル・インピーダンス算定法の考察	30
2.5.1 測定及算定の原理	30
2.5.2 算定例	31
2.6 結 言	34

第 Ⅲ 章 實際的な問題に対する応用

3.1 緒 言	35
3.2 明石・洲本間架空海底ケーブル混成線路の過渡的特性及送端開路電圧の計算	35
3.2.1 実測方針及測定項目	35
3.2.2 ケーブル部分の測定	36
3.2.3 送電線部分の測定	37
3.2.4 変圧器部分の測定	38
3.2.5 開路電圧の計算	38
3.3 山科・段本間木柱送電線路の特性	41
3.3.1 実測方針及測定項目	41
3.3.2 送電線部分の測定	42
3.3.3 変圧器部分の測定	43
3.3.4 論 議	44
3.4 接地インピーダンスの測定	46
3.4.1 実測方針及計画	46
3.4.2 実測記録	47
3.5 電車用電動機のインディシャルインピーダンス及保護蓄電器設計に対する応用	48
3.6 結 言	49

第 Ⅳ 章 インディシャルインピーダンス測定法の 包絡演算法に対する応用

4.1 緒 言	50
---------	----

4.2	包絡演算法の紹介	50
4.2.1	用語記法及基礎定理	50
4.2.2	包絡演算法の構成	54
4.2.3	振動函数の相束図形と之に依る基礎定理の證明	60
4.2.4	励振固有波函数の導入	65
4.2.5	包絡演算法の対象となる固有波函数	66
4.2.6	$Q_n(z, z)$ 及 $A(z, z)$ 函数の導入	68
4.2.7	周期音波の増巾歪曲の実例計算	70
4.3	インディシャルインピーダンス測定法の適用	72
4.3.1	原理	72
4.3.2	励振固有波函数の測定	72
4.3.3	中間周波変成器に対する実測例	73
4.4	結 言	75

第 2 編

測定線上の波動変歪誤差に関する研究

第 V 章

測定線に関する研究

5.1	緒 言	78
5.2	測定線の定義、変歪誤差の分類及測定線の示性条件	78
5.2.1	測定線の定義	78
5.2.2	変歪誤差の分類	78
5.2.3	測定線の示性条件	79
5.3	変歪誤差の基礎算式及電磁誘導攪乱	79
5.3.1	変歪特性	79
5.3.2	電磁誘導攪乱	81
5.3.3	対稱測定線の構成条件と変歪特性	81
5.4	同心円筒状遮蔽線の実測特性	83
5.5	測定導線に依る変歪	84
5.6	結 言	86

第 VI 章

容量分圧器結合遅延線方式の研究

6.1	緒 言	87
6.2	回路構成	87
6.3	変歪特性及補償分圧線の構成法	88

6.3.1 一般式	88
6.3.2 遅延導線の変歪特性	90
6.3.3 遅延分圧線の変歪特性	91
6.3.4 補償分圧線の構成方法	91
6.3.5 非整合型補償分圧線の変歪特性	93
6.3.6 整合型補償分圧線の変歪特性	94
6.4 数値計算	95
6.5 実験的検討	96

第 VII 章 京大型新遅延線方式の研究

7.1 緒言	98
7.2 原理	98
7.3 表皮作用に対する検討	99
7.3.1 影像電圧比及波動インピーダンスに対する一般的基本式及解式	99
7.3.2 変歪補償線路の解式	102
7.3.3 無補償線路の解式	103
7.4 影像電圧比及波動インピーダンスの数値計算	103
7.4.1 補償線路の場合	103
7.4.2 無補償線路の場合	104
7.5 遅延導線の形式とせる場合の変歪特性	105
7.6 京大型新遅延線の試作及実験結果 (其の一)	106
7.6.1 構造方式	106
7.6.2 実験結果	106
7.7 京大型新遅延線の試作及実験結果 (其の二)	107
7.7.1 構造方式	107
7.7.2 実験結果	107
7.8 結言	108

第 VIII 章 空中線結合分圧器に関する研究

8.1 緒言	109
8.2 空中線分圧器の方式、分圧特性の基本式	109
8.2.1 総説	109
8.2.2 各種分圧方式	110
8.2.3 一般的分圧基本式	110

8.3	空中線を集中定数と假定する時の分圧特性	111
8.3.1	抵抗分圧回路の分圧特性	111
8.3.2	容量分圧回路の分圧特性	112
8.3.3	抵抗容量分圧回路の分圧特性	113
8.4	空中線の分布定数を考慮せる分圧特性	114
8.4.1	容量分圧方式	114
8.4.2	抵抗容量分圧器	117
8.4.3	各種分圧特性の数値計算	119
8.5	空中線誘起電圧の不均一振動	120
8.5.1	誘起電圧の振動現象	120
8.5.2	不均一性振動の計算	121
8.6	結 言	123

第 IX 章 変歪誤差の補正理論

9.1	緒 言	125
9.2	変歪誤差補正法の原理	125
9.3	直角波頭の変歪特性に対する補正函数	127
9.3.1	一般関係	127
9.3.2	最單純変歪誤差の補正函数	127
9.3.3	無損失遅延導線に対する補正函数	128
9.3.4	無損失遅延分圧線の補正函数	128
9.4	非直角波頭の変歪特性に対する補正函数	129
9.4.1	一般関係	129
9.4.2	複指数函数状変歪誤差の補正函数	130
9.4.3	遅延導線の実測変歪特性に対する補正函数の計算例	130
9.5	補正誤差の検討	131
9.5.1	分解能	131
9.5.2	偏位誤差	132
9.5.3	微分誤差	132
9.5.4	積分誤差	133
9.6	結 言	133
	参考文献	135

附 録

I

相乗冪級数の収斂条件

10.1	相乗冪級数の収斂条件	-----138
10.2	$u(t)$ の断片的表示形式に依る収斂条件の證明	-----138
10.3	特別な函数の収斂状況例	-----141

附 録

Ⅱ

$Q_n(\zeta, z)$ 函数の図表

11.1	図表の範囲	-----143
------	-------	----------

第 0 章 總 說

0.1 總 說(内容梗概)

本論文は二編に分つ。第1編は四章に亘つて過渡インピーダンスの測定及之が応用に関する研究を収録し、第2編は測定線上の波動現象を中心に、分圧線、遅延線、導線、空中線分圧器等々の変歪誤差及其補正問題の諸研究を五章に亘り説述した。尚附録を二部設け、相束冪級数の收斂條件及 $Q_n(x, z)$ 函数の図表を示した。

第1編の主体は第ニ京大法なる過渡インピーダンス測定法の講述にあるが、これに含ませる新たな演算理論として、現象演算法及包絡演算法の紹介に力を注いだ。先づ第I章に於て、過去の過渡インピーダンスの測定方法を簡単に批判し、引續き第ニ京大法の原理、特徴、インディシヤル・インピーダンスの直描測定法等を述べ、非直描下の過渡インピーダンスを演算子函数で取扱ふ立場を述べた。而して実測オシログラムに対するインピーダンス函数の算定例若干を紹介し同時に其の応用として、等価電気回路の誘導を試みた。第II章の主体は現象演算法に依るインディシヤル・インピーダンスの計算法である。最初に同演算法の構成を述べ、之を第ニ京大法へ適用して、図形的にインディシヤル・インピーダンスを見出す方法、及更に之を拡張して、インピーダンスのみならず、アドミッタンス、電圧比、電流比、影像定数を算定する方法に迄及ぼした。而して演算子函数で處理困難と思はれるオシログラムを現象演算法で處理し、奏効せる算定例多数を示し、尚電圧、電流の測定を基とするインディシヤル・インピーダンスの算定法を代表的实例を以て示し、現象演算法の特色とせる處を明白ならしめた。第III章は長距離ケーブル線路及架空送電線路、送受電変圧器、電車用電動機及接地インピーダンス等の實際的な場合に就て、第ニ京大法を使用し、インディシヤル・インピーダンスの測定を行い、線路の波動的性質、系統インピーダンスの性質、変圧器の特性等々を調査し、線路、変圧器、接地等のインピーダンス函数、開路電圧、或は電車用電動機の保護蓄電器の設計等を行い、實際面に於ける応用例としたものである。

第IV章はインディシヤル・インピーダンス測定法の一応用分野として、包絡演算法なる新演算理論への適用原理を示したもので、其の原理を示す爲に先づ包絡演算法の構成を詳述し、次でインピーダンス測定法との關係を述べた。尚実測例多数を以て、包絡過渡現象の動態を示し、包絡演算法と測定法との關係を明瞭ならしめた。

第2編の主体は、測定線の波動性を主眼として、線上及線端に起る波動変位の理論的講述及実験的研究にある。先づ第V章は測定線に関する研究として、測定線の分類定義法、二導体測定線の変歪特性の一般式を紹介し、次で実験的検討として、衝撃電圧測定に使用すべき分圧線用ケーブル及導線の実測特性を紹介した。第VI章は容量分圧遅延線の研究であつて、整合不完全に基く変歪を遅延導線、遅延分圧線の二種に分つて吟味し、次に補償分圧線の構成法を研究し、各種の補償法を紹介後最も優良と認められる一方式の変歪特性を算定した。尚他の方式の変歪特性を数値計算すると共に実験的検討を追加した。第VII章は少資材、低価格にて優良なる特性を保有せしめべく考案した京大型新遅延線方式の紹介である。最初に考案の原理を述べ次で表皮作用に基く変歪を計算し、其の漸近級数解の正確なる係数を算出し、次に数種のパラメーターを設けて、可成り広い範囲に亘る数値計算を実施した。次に実用的な構造をもつ新遅延線二種を試作して其の変歪特性を実測し満足す可き結果を収めた。第VIII章は雷誘導電圧観測用空中線分圧器の検討であつて、主として空中線の波動性に基く変歪誤差を吟味し、抵抗、容量、抵抗容量分圧器三者に就て其の分圧特性を算出した。而して優良なる分圧特性を求める方法及、特性の相乗近似法等を考案し代表的分圧特性の数値計算を行つた。尚空中線定数の不均等性に対する吟味も加へ、良質なる斯種測定への寄與とした。第IX章は変歪誤差補正法の研究であつて、一般的に補正函数なるものを設けて補正を施行する方法及其の諸注意を紹介し、理論的変歪特性と実測特性の数例をとつて、其の補正函数を求め、尚極めて單純な誤差は、微分及積分操作で簡単に補正し得る事實を明白ならしめた。

最後に附録を二部設け補足とした。附録Iは相乗冪級数の収斂条件の吟味である。時間函数及演算子函数の二面から、相乗冪級数の収斂条件を求め、之が時間函数初期値の冪級数の収斂条件と一致する事を證明し、最も遅収斂と考へられる一振動函数に対し項値を算出し、収斂の遲速を判定した。

附録IIは包絡演算法の基本である $Q_n(\xi, \zeta)$ 函数の性質を紹介する爲に作成した同函数図表であつて、 $\xi=0 \sim 2.0$ $\zeta=0 \sim 12$ 迄のものを11種掲げた。

0.2 謝 辞

本研究は野外実験を行つた一部を除き、其の殆ど大部分は、京都大学工学研究所内、高圧電力実験室に於て行はれた。本研究に要した少からぬ研

究資料、人費、時間及機関を活用し得る好遇を受けた大学当局、及嘗て膝下に懇篤なる御指導を忝くした本学鳥養総長に深く感謝の意を捧げたい。

筆者が衝撃波技術を習得するに至る迄の経程は、鳥養博士に依り御指向配慮を得たものである。又林重憲教授は、筆者にインピーダンス函数測定法の主題及其の実施法を與へられ、応用分野を開眼せしめられて、爾来不敏な筆者を御鞭達終始たゆまぬ御指導を賜り、研究進展上の凡ゆる便宜と寛容を與へられた。實に林博士の御寛容と教導無かりせば、恐らく本論文も成らざる可く、その總ては林先生に負ふものと云つて過言ではない。

記して深謝申上げる次第である。更に嘗て衝撃波技術の御指導を賜つた上西亮二講師にも御礼申上げたい。本論文中空中線分圧器に關聯する事項の問題は同講師に依つて與へられた数々の有益なる御示唆に倣つて成長して行つたものである。

本論文を作成するに到る迄には、關聯する處多數の実務援助員及後援者を要した。関西配電株式会社は、明石一洲本間の海底ケーブル線路試験及坂本変電所に於ける實驗に、又大阪変圧器株式会社は京大型逼近ケーブル代用線の製作に多大の便宜を與へられた。本研究初期の頃のインピーダンス函数の測定及インディシャル・インピーダンスの測定と図式計算等には富田正夫君、安積榮一郎君、吉村千鶴子君、三宅知子君等の助力を要した。

特に病弱を押して努められた^敬山田幸則君の助力は忘却し得ぬものである。

又後期に於ては川口正義君に一部の實驗を又、山田壽夫君に實驗、計算原稿整理、淨寫等多大の勞力を煩はした。何れも茲に銘記して深謝申上げる次第である。

①.3 主要記号表

p	:	演算子
t	:	時間変數
$H(t)$:	單位函数
$S(t)$:	衝撃函数
$*$:	相乘記号
\sim	:	相除記号
$u(t)$:	一般時間函数
$U(p)$:	一般演算子函数
$V(p), v(t)$:	電圧
$I(p), i(t)$:	電流

$Z(p), z(t)$: インピーダンス
$Y(p), y(t)$: アドミッタンス
$W(p), w(t)$: 波動(又は影像) インピーダンス
$\underline{W}(p), \underline{w}(t)$: 同 上 アドミッタンス
$\bar{z}(p), \bar{z}(t)$: 影像(又は波動) 電圧比
$\underline{\bar{z}}(p), \underline{\bar{z}}(t)$: 同 上 電流比
$U(p), \mu(t)$: 反射係数
$N(p), \eta(t)$: 電圧比
$\underline{N}(p), \underline{\eta}(t)$: 電流比
$F(p), f(t)$: 変歪特性
$M(p), m(t)$: 補正函数
$Q(p), q(t)$: 中核函数(現象演算法の)
$\Delta(p), \delta(t)$: 偏差函数(同 上)
s	: 包絡演算子, 単位換算係数, 整数
$S[\cdot], S[\psi(t)]$: 単位振動函数(包絡演算法の)
$\mathcal{U}(t)$: 一般振動函数
$\mathcal{V}(t)$: 位相角
\mathcal{P}	: p -函数より t -函数への変換子
\mathcal{L}	: t -函数より s -函数への変換子
\Leftarrow	: 演算対応記号
$*$: 衝撃相束記号
$Q_n(\zeta, z)$: Q 函数(包絡演算法の)
$A(\zeta, \xi)$: 振幅函数(包絡演算法の)
Π	: 乗積記号
τ, ζ, z	: 実副変数
ξ	: 実副変数, 線輪の長さ
Ω, ω	: 角周波数
ν, λ, r	: 整数(0, 1, 2, 3, ...))
m, n	: 比数, 整数
T	: 期 間
M	: 正実任意数
x	: 距離変数
l	: 距離
g	: 波動傳播速度

c	: 光 速
C	: 静電容量
L	: インダクタンス
R	: 抵 抗
G	: コンダクタンス
r	: 抵抗, 導体半径, 整数
E	: 自然対数基数
$\varepsilon_s, \varepsilon_x$: 誤差率, 微小数
$\ U\ $: 単位マトリックス
$\tilde{u}(t)$: $u(t)$ の定値分函数
$\tilde{u}'(t)$: $u(t)$ の不連続部分を脱落せしめたる函数, 例へば $t=0$ に $u(0)$ を有する一個の不連続部分がある時は $\tilde{u}'(t) = u(t) - u(0) \quad (0 < t)$
$\tilde{u}''(t)$: $u(t)$ の衝撃函数を脱落せしめたる函数, $\tilde{u}(t) \neq \tilde{u}''(t)$

①・4 術 語 表

本論文中には従来の工学上の語彙を以てしては内容の表現が不可能乃至不確実となる創造部面が多々ある。斯かるものに対しては、出来得る限り従来の語を以て同等表現をなさしむべく努めたが、己むなく新術語を作製したものも尠くない。之等の詳細な内容は論文の讀過に従つて、明瞭正確に把握される處であるが、讀過の便を考へ夫等の一部を簡單に定義及内容説明と共に随所に網羅して慣用に資せしめる事にする。(内容順)

0.4.1 過渡インピーダンス

過渡電流の流通に伴ひ、過渡電圧を対応させる線型回路に於て、一般に過渡電流の波形と異なる形狀の過渡電圧を発生する場合、この回路は過渡インピーダンスを有すると定義する。故に過渡インピーダンスなる術語は定量的ではなく、定性的な広い意味を有し、時にはインディシヤル・インピーダンスと同義に、又時にはインピーダンス函数と、同義に取扱はれても宜しいものとする。

0.4.2 現象函数, 現象演算法

現象函数: 物理量の時間函数であるが、觀測的事實に基く觀測量であることを條件とする函数である。この條件を以て通常の時間函数と區別する。現象函数の最も重要な性質は、衝撃函数を含有しない事、図形的に表示される事、故に図式相乗計算を必ず施行し得る事等である。

現象演算法: 図形的に表示せられた現象函数の所望の演算形式を導く

相乗定理に依り図形的に計算する演算法の呼稱である。

0.4.3 直描, 直描測定

直描: オシログラフに依り所望量の観測を行ふ時、直接所望量を図形的に描示せしめる如くするのを直描¹⁾と云ふ。

直描測定: 上記直描状態でオシログラフを定める事を直描測定という。

0.4.4 相乗記号, 階段相乗記号, 衝撃相乗記号

相乗記号: Duhamel の定理, 若しくは演算子法に於ける Borel の定理を一種の乗積算として取扱ひ適当な乗積記号を制定して之を相乗記号と稱する。

階段相乗記号: $u_1(t), u_2(t)$ の相乗を次の形式で行ふものを階段相乗と呼稱し記号 \ast を附す。

$$u_1(t) \ast u_2(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) d\tau$$

階段の語を附したのは、上記相乗形式が 階段状単位函数 $H(t)$ ²⁾ を基準とする通常演算子法に対応するからであつて、普通相乗記号と云へば特に断らぬ限り階段相乗記号を指すものと定める。

衝撃相乗記号: 上記相乗記号に於て、 $u_1(t), u_2(t)$ の相乗を次の形式で行ふものを衝撃相乗と呼稱し記号 \times を附す。

$$u_1(t) \times u_2(t) = \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) d\tau$$

衝撃の語を附したのは上記相乗形式は衝撃函数 $S(t)$ ³⁾ を基準とする演算子法⁴⁾に対応するからである。

0.4.5 相除演算, 相除記号

相除演算: 相乗演算に相反する演算, 即商算を考へ斯かる演算を相除演算と呼稱する。

相除記号: 上記相除演算に必要な記号として \sim を制定し $0 \leq t$ に存在する函数 $u_1(t), u_2(t)$ の相除とは下記形式を意味せしめる。

$$\frac{\sim u_1(t)}{\sim u_2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\int_0^{\infty} u_1(t) e^{-pt} dt}{\int_0^{\infty} u_2(t) e^{-pt} dt} \frac{e^{pt}}{p} dp$$

1) Transient Analyser に於ける過渡現象直視では無い事を注意する。

2) $H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

3) 衝撃函数 $S(t)$ は種々定義され得るが茲では $S(t) = \frac{d}{dt} H(t)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} S(t) dt = \int_0^t S(t) dt = 1$, $S(t) > 0$ で表はされるものを探る

4) Doetsch⁽¹⁴⁾, Droste⁽²⁰⁾, Stratton⁽¹⁵⁾, 桜井⁽¹⁹⁾ 氏等が用いた形式を指す

0.4.6 中核函数 (現象演算法の)

現象函数の近似時間函数式を其中核函数と呼稱し、多くの場合相除演算施行時分母を相乗累級数に展開する時の中心に使用する。

0.4.7 相乗図形

図形函数=個の階段相乗は函数値を縦横軸にとり 時間パラメーターとして相補的時刻点を連絡した図形の面積を計量して遂行出来る¹⁾。断様を図形を相乗図形と稱する。

0.4.8 変歪誤差, 変歪特性

変歪誤差: 時間函数量の観測に當つて惹起する函数的誤差を變歪誤差と云ひ、各時刻に於ける測正值と正值との偏差で表す。

変歪特性: 変歪誤差を伴ふ測定器に單位函数狀原波 $H(t)$ を與へ、求め得た観測波の函数的形狀を變歪特性と云ふ。

分圧特性: 變歪特性には分圧的要素を含まないが、之に分圧要素を含ませた時の變歪特性を分圧特性と稱し前者と區別する。

0.4.9 補正計算, 補正函数

補正計算: 變歪誤差を更正する目的を以て行ふ計算を補正計算と呼稱する。單なる更正算と異るは時間函数を取扱ふか否かの相違にある。

補正函数: 變歪特性 $f(t)$ が與へられた時、補正計算は $f(t)$ から定まる或る時間函数 $m(t)$ を測定波に相乗して遂行出来る。この $m(t)$ を補正函数と呼稱する。

0.4.10 包絡函数, 包絡演算法

包絡函数: 振幅変調を被りたる振動函数を考へ其の振幅の包絡線が表明する時間函数を包絡函数と呼稱する。

包絡演算法: 振動函数に対し振動波個々の性質を考慮せず、その包絡函数だけの計算を行ふ特殊の近似演算法を包絡演算法と呼稱する。

0.4.11 單位振動函数, $S[0]$ 波, $S[\psi(t)]$ 波

單位振動函数: 單位函数 $H(t)$ 狀の包絡函数を有する振動函数を單位振動函数と呼稱する。

$S[0]$ 波, $S[\psi(t)]$ 波: 單位振動函数の初期値が、0 及 $\psi(0)$ なる場合の單位振動函数を夫々 $S[0]$ 波、及 $S[\psi(t)]$ 波と呼び夫々記号 $S[0]$ 及 $S[\psi(t)]$ を以て表し包絡演算法の基準函数に取る。

0.4.12 Q函数

1) 例へば Nerken 氏の方法⁽⁷⁾

$$Q_n(\zeta, z) = 1 - \varepsilon^{-\frac{(1-j\zeta)z}{2}} \sum_{\nu=0}^n \frac{(1-j\zeta)^{\nu} z^{\nu}}{\nu!}$$

(ζ : 実数 z : 正実数)

を以て定義され、包絡演算法に必要なる函数である。

第 1 編

過渡インピーダンスの測定
及其の応用に関する研究

第 I 章 インディシヤル・インピーダンス及インピーダンス函数 測定法の概観

1.1 緒言

J.R. Carson に依り命名せられたインディシヤルインピーダンス及インディシヤルアドミッタンス¹⁾の概念を以て、電気回路過渡現象の解析に資する思想は注目すべきものであるが、先験的電気回路の存在を偏重して居る過渡現象解析体系では、この概念を真に活用して居をかつたと信ずる。

Carson 流のインディシヤル二定数を更に活用しインディシヤル電圧比及電流比の定義に迄及し、測定を基幹とする過渡現象の解析体系を造る事は相当重視すべき事柄である。本章ではその発端をなすインディシヤル・インピーダンス及インピーダンス函数の測定法を歴史的に概観する。

そもそもインディシヤル・インピーダンス及アドミッタンスの測定法が机上にては頗る容易であるに拘らず、其の実施例を見る事が寥々であつた事實は、諸種の理由があろうが、測定器及測定方法に缺陷の無い考案を廻らす事が出来なかつた爲と、測定結果を整理する方法に缺ける処があつた爲であると信ずる。僅かに本邦に於て福田節雄博士が、閉路電圧の測定を以て、インディシヤル・インピーダンスの測定に当られ、相当広範囲の電気機器について、多数のオシログラムを収録せられてゐる外は、林重憲博士及筆者の研究以外、内外に其の研究は余り見掛けまいのである。福田博士の取られた手法は福田氏法と稱させて頂く事にする。之と対蹠的な林博士及筆者の手法は、京都大学に於て發展せしめられたる故を以て、其の初期のものを第一京大法、後期のものを第二京大法と呼稱してゐる。而して之等發展した測定法はインピーダンス測定法のみに限られ、之と双対を成すアドミッタンス測定法の方は実施困難の故を以て顧みられてゐない。併し後章の記述で明かとなる如く、インディシヤル・インピーダンスの図形的測定値を基とし、アドミッタンスのみならず他の諸定数に至る迄之を算定する事が可能であるから、不都合を来す丁は無い。

インディシヤル・インピーダンスを数式に変換し求め得た時間函数を、演算子函数に変換したものはインピーダンス函数と呼ばれ、其の取扱は前者よりも遙かに容易である。故に若しインピーダンス函数の測定に成功すれば、夫は直ちにインディシヤル・インピーダンスを與へる丁になり、又逆にインディシヤル・インピーダンスを決定し得れば夫は直ちにインピーダ

¹⁾ J.R. Carson: Electrical Circuit Theory and The Operational Calculus.⁽¹⁾

ンス函数を與へる。

本章に於ては、前に記した各種手法を順次紹介すると共に、特に第一京大法の原理及方法を詳しく述べインピーダンス函数測定法として本法の実施例及應用例若干を示す事とする。

1.2 福田氏法及第一京大法

1.2.1 福田氏法に依るインディシャル・インピーダンスの測定

昭和11年に福田博士は、直流の急遮断に依つて生ずる復帰電圧を測定し、インディシャル・インピーダンスを直接的に測定する手法を発表せられた。¹⁾ 次に簡単に其の原理を説明する。

直流電流 $-I$ を流通する駆動系に、定常的に出現する電圧 $-V_0$ は、其の内部抵抗 R に依る電圧降下 $-IR$ に等しい。次に $-I$ を $t=0$ に於て急遮断して出現する電圧 $v(t)$ は、其のインディシャル・インピーダンス $z(t)$ に I を乗じたものと $-V_0$ との和である。之より

$$z(t) = \frac{v(t)}{I} - R \quad \text{----- (1.1.1)}$$

として $z(t)$ が得られる。一般の電気機器では、 R が $v(t)/I$ よりも非常に小さい場合があるので、(1.1.1) 第二項を省略してよいのが普通である。

福田博士は、電流遮断を実施するのに三極真空管を利用し、同時に過渡現象直視装置を之と併用し、一種の過渡インピーダンス直視装置を製作せられたのであつた。福田氏法は、駆動系インピーダンスの測定だけでなく、傳達インピーダンスの測定にも適用され得るものである。

福田氏法の最大の難点は、定常抵抗が極めて大きい。例へば絶縁性回路の測定が不可能となる事である。其の他の難点としては、三極真空管に流通する電流を便宜の値に制限せねばならぬ事であつて、この為低インピーダンスの測定が困難となる。之等の缺点を除けば、本法は、インディシャル・インピーダンスを図形的に直接オシログラムとして得る事、即ち直描し得る事に大きな利点がある。

1.2.2 第一京大法に依るインピーダンス函数の測定

林重憲博士は昭和16年にテブナン定理を応用し駆動系インピーダンスを測定する他の方法を発表せられた。²⁾ 即ち諸定数を以下演算子函数で表現するものとし、内部インピーダンス $Z_0(p)$ が既知である衝撃電圧発生装置

1) 福田節夫: 3工大 2B-(24)(昭11.5)⁽²⁾, 電学誌 56.580 1130(昭11)⁽³⁾, 56.581 1197(昭11)⁽⁴⁾

2) 鳥養利三郎, 林重憲, 岩本國三: 19 聯大 (昭16-9)⁽⁵⁾

I・Gに、未知インピーダンス $Z_x(p)$ を結合し、最初I・Gを無負荷状態にして動作し、出力電圧 $V_0(p)$ を得、次に $Z_x(p)$ を結合しI・Gを再び動作させて、出力電圧 $V_x(p)$ を得る如く操作する。この二回の測定に依り $Z_x(p)$ は次式で算定出来る。

$$Z_x(p) = Z_0(p) \frac{V_x(p)}{V_0(p) - V_x(p)} \quad \text{----- (1.2.1)}$$

以上の原理及び方法を總稱し第一京大法と名付ける。本法はオシログラムの記録が演算子函数で表現し得るものとして、成立つものである。處がオシログラムに現れる電圧は時間函数 $v_0(t)$, $v_x(t)$ であつて、演算子函数 $V_0(p)$, $V_x(p)$ ではない。従つてオシログラム上の電圧波形を一旦數式化し後に演算子函数化を行ふ手續を経て、茲に初めて本測定法が成立つたとなる。本測定法は福田氏法の最大の缺點たる絶縁性回路の測定困難が無く、又、可成り廣い範囲のインピーダンスを測定する事が可能である。併し、 $Z_x(p)$ 若くはその時間函数 $v_x(t)$ がオシログラムから直接得られるのでは無いから所望の結果を出すのに手續を要する。この手續は $v_0(t)$ 及 $v_x(t)$ が複雑な形状を取ればとる程多くなると共に一定の誤差を伴ふ。今この誤差を見積るために $v_0(t)$ 及 $v_x(t)$ が一定値に近いものと假定し、従つて $V_0(p)$ 及 $V_x(p)$ が定數 V_0 及 V_x に近いものとする。オシログラムの分解能に基く V_0 及 V_x の讀取り定誤差を δ とする時には(1.2.1)より

$$Z_x(p) \doteq Z_0(p) \frac{V_x}{V_0 - V_x} \left[1 \pm \frac{|\delta|}{V_x} \pm \frac{2|\delta|}{V_0 - V_x} \right] \quad \text{----- (1.2.2)}$$

$$|\delta| \ll V_0, V_x$$

となる。故に測定誤差を最少ならしめる條件は

$$\frac{V_x}{V_0} \doteq \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \quad \text{----- (1.2.2')}$$

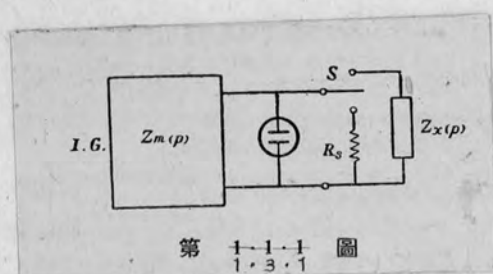
とする。この場合の最小誤差率は

$$\varepsilon_x \doteq (1 + \sqrt{2})^2 \frac{|\delta|}{V_0} \quad \text{----- (1.2.2'')}$$

である。 $V_0(p)$ 及 $V_x(p)$ が定數のみの場合も以上の條件に準い、或程度有利な測定條件を判定することが出来る。

第一京大法は波動インピーダンス及影像電圧比の測定に當つた時、最も有効に活用し得る。この応用例は、第2編5.4測定線の特性実測の項に於て示す事とする。

第一京大法の特質は未知インピーダンスをインピーダンス函数の形で求



第 1.3.1 圖

第二法原理圖

める事に掛つてゐるから、このインピーダンス函数を處理すれば、電氣的等價回路を導出する丁が可能となる。斯くして觀測結果に依り等價電氣回路を決定すると云ふ思想を、發展させる丁が出来る。

1.3 第二京大法

1.3.1 原理

第一京大法は、やゝもすると甚だ大きな測定誤差を發生する丁があるやうで、該法に依る一連の成果發表後¹⁾向も亦く筆者は之を改善し第二京大法を創始した。其の原理は次の如きものである。即ち以下演算子函数を使用するものとし、内部インピーダンス $Z_m(p)$ を有する衝擊電圧發生裝置 I・G に、標準インピーダンス $Z_s(p)$ を結合し、I・G を動作せしめて、其の出力電圧 $V_s(p)$ を測定し、次に未知インピーダンス $Z_x(p)$ を、 $Z_s(p)$ の代りに接続して、同じく出力電圧 $V_x(p)$ を測定する。この二回の測定に依り、次式で未知インピーダンスの計算が出来る。即ち

$$Z_x(p) = \frac{V_x(p)}{V_s(p) + \frac{Z_s(p)}{Z_m(p)} [V_s(p) - V_x(p)]} Z_s(p) \quad (1.3.1)$$

この場合、極力 $|Z_s(p)| \ll |Z_m(p)|$ に近からしめる様な測定條件を確定するのである。若しこの條件が満された場合には (1.3.1) 式は

$$Z_x(p) \doteq \frac{V_x(p)}{V_s(p)} Z_s(p) \quad (1.3.2)$$

となる。故に $V_x(p)$ 及 $V_s(p)$ に夫々オシログラムの分解能に基づく誤差 $\delta_x(p)$ 及 $\delta_s(p)$ の如きを發生しても $Z_x(p)$ の算定誤差率 ε_x は

$$\varepsilon_x \doteq \pm \frac{\delta_x(p)}{V_x(p)} \pm \frac{\delta_s(p)}{V_s(p)} \quad (1.3.3)$$

となり之は $V_x(p)$ 及 $V_s(p)$ が大なる程小さく、両者が近い値では、何れか一方の誤差率の凡そ2倍を占める。此の値は第一京大法の最良條件下における誤差率よりも遙かに良好である。

第二京大法の一般的原理に於ては、やはり第一京大法に於けると同じく、演算子函数を運用せねばならない。然し前述の理由から測定及算定誤差は僅少なものである。又次に述べるやうな特殊測定法を活用する時には、インディシヤル・インピーダンスの所謂直描測定を行ふ丁も出来るのである。

1.3.2 特殊測定法

¹⁾ 林, 河村, 岩本, 山本, 吉久保, 中西: 電評 31 (昭18-12)⁽⁶⁾

I・Gの内部定数を適当に撰定する時は、オシログラフの測定時間域内で内部インピーダンス $Z_m(p)$ を略抵抗とらしめることが可能である。測定時間域及時間的分解能を逸脱した處では $Z_m(p)$ は抵抗同等と見做し得ずとも差支へない。同様に標準インピーダンス $Z_s(p)$ も抵抗とらしめる。今大々の値を R_m 及 R_s とする。比数 m を取り

$$m-1 = R_m/R_s \text{ ----- (1.3.4)}$$

とする。この m を陰極線オシログラフの分解誤差率の逆数よりも大にとりものとする。而して

$$m \ll 1$$

なる条件が満される時は特殊測定法が成立する事になる。この特殊測定法には二種類の場合がある。

- (i) $V_s(p)$ を定数即ち $v_s(t)$ を矩形波とらしめる場合
(直描測定法)

I・Gの出力電圧を適当にして、表記の条件を実現出来る。今 $V_s(p)$ を V_s にて表せば(1.3.3)は

$$\begin{aligned} Z_x(p) &= \frac{V_x(p)}{V_s + \frac{R_s}{R_o} [V_s - V_x(p)]} R_s \\ &\doteq \frac{V_x(p)}{V_s} R_s \text{ ----- (1.3.5)} \end{aligned}$$

となる。此の略算式はオシログラムに現はれた $v_x(t)$ を以て、直接インディシャルインピーダンス $z_x(t)$ を表現し得ることを示してゐる。即ち

$$z_x(t) \doteq \frac{v_x(t)}{V_s} R_s \text{ ----- (1.3.6)}$$

である。斯様を特殊測定法を直描測定法と呼稱してゐる。

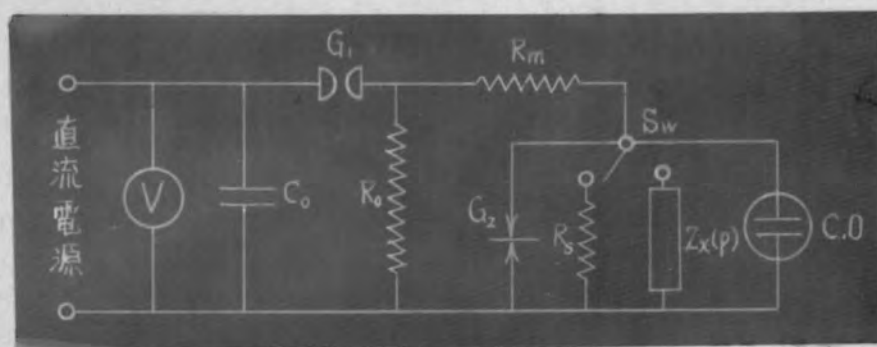
- (ii) $V_s(p)$ を $V_s p/(p+\alpha)$ なる形式、即ち $v_s(t)$ を $V_s e^{-\alpha t}$ なる指数函数波とらしめる場合。

(積分補正測定法)

I・Gの内部定数を適当にすれば斯様な状態が実現出来得る。但しこの状態は(i)の条件を満せきつた時に起る丁が多い。

$$Z_x(p) = \frac{V_x(p)}{V_s} \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right) R_s \text{ ----- (1.3.7)}$$

となるから、この時間函数は、



第1.3.2図 第二京大法の實際的回路構成

$$\tilde{v}_x(t) = \frac{1}{V_s} [v_x(t) + \alpha \int_0^t v_x(\tau) d\tau] R_s \text{ ----- (1.3.7)}$$

を表す。(1.3.6)と比較して両者の相違は後者に積分項が附く点にあることが判る。即(1.3.7)は $v_x(t)$ を時間的に積分し、之に α を乗じたものが一種の補正項となることを示す。依つて斯様な測定法は、積分補正測定法と呼稱してよい。

1.3.3 測定法の実際

第二京大法の実施技法として最も容易な形式は、第1.3.2図の如く、静電蓄電器 C_0 、放電抵抗 R_0 、及始動装置を有する火花間隙 G_1 の三者を主要部とする一般式衝撃電圧発生装置の出力端子に直列に高抵抗 R_m を接続し、図の如く切換開閉器 S_w にて、標準抵抗 R_s を未知インピーダンス $Z_x(p)$ を交互に接続し得る如くして、陰極線オシログラフの偏位板C.Oを以て、 R_s 及 $Z_x(p)$ 両端の電圧を測定し得る如くする。

前述の特殊測定法を実現する爲には $R_m \cong \infty$ ならしめるのが理想であるが、この時 C_0 の充電電圧 V_0 も又 $V_0 \cong \infty$ ならしめねばならない。

実際面では V_0 を著大に取ると鋭い立ち上りの電圧波を得ることが困難となり、他方陰極線オシログラフへ誘導電圧を及ぼす率が大きくなる。普通構造陰極線オシログラフの最高偏位電圧は500V内外を実例とするから其の値を数拾程度に取るには V_0 を数拾KVに取らねばならぬ。 V_0 が10KV近くでは辛うじて直描測定が可能となる程度、何の事から見ても完全と認められる直描測定を行ふには V_0 は20KV程度を要する。

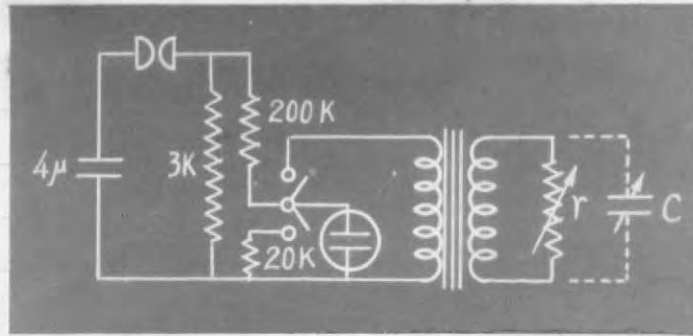
第1.3.2図に於てC.Oと並列に挿入する間隙 G_2 は保安火花間隙である。

その効用は若し $Z_x(p)$ の定常抵抗が著大である時は測定時間域を経過してから $Z_x(p)$ 及 C_0 に危険な電圧を発生するので之を保護する爲のものである。筆者の場合はパラフィン紙を電極間に挟み付け之が穿孔破壊する毎に紙を移動して便利に使用出来た。

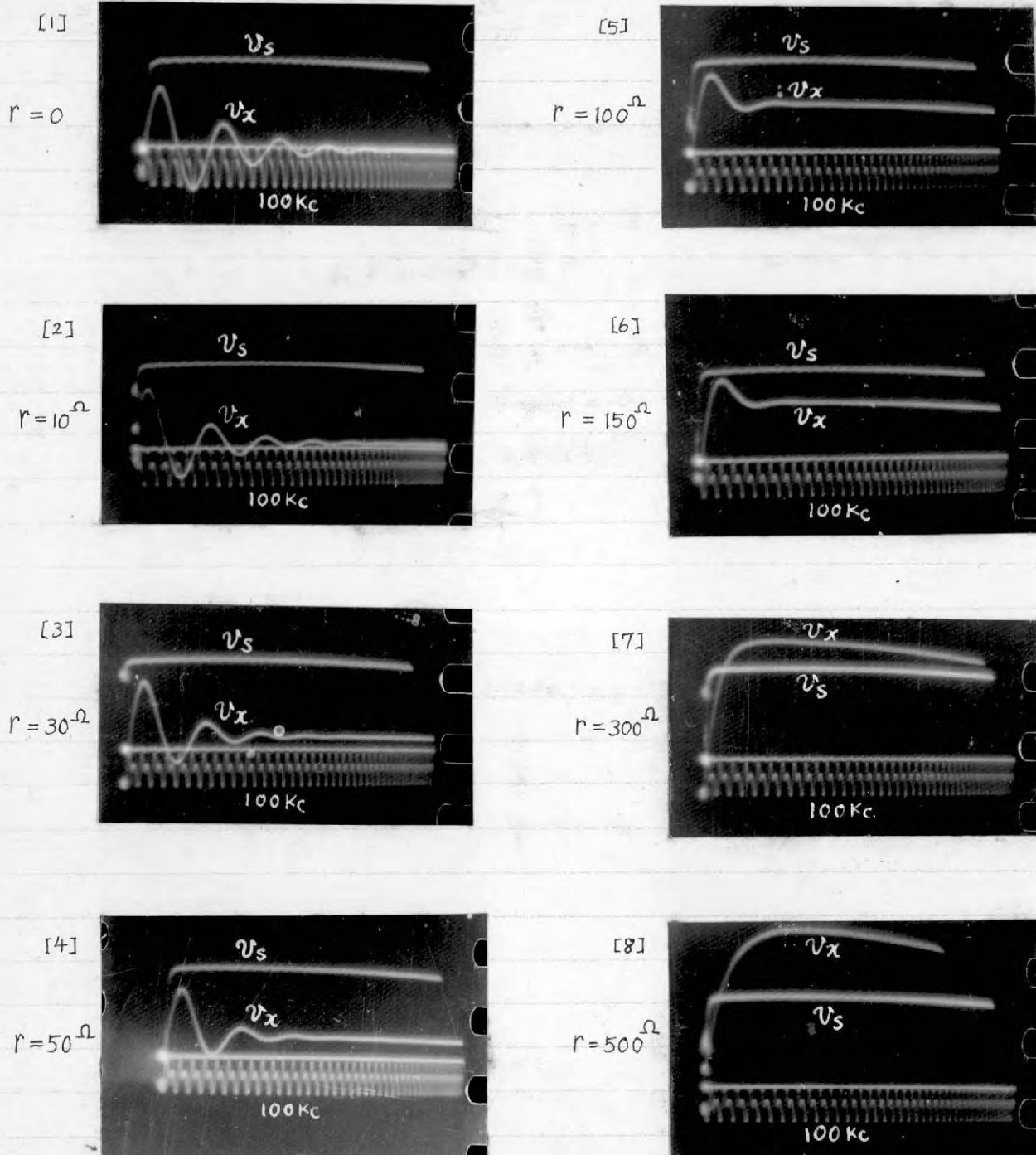
静電蓄電器 C_0 は可及的大容量に選ぶ。火花抵抗を無視し、第1.3.2図の回路を其の儘、其の等価回路と假定すると、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_0(t) &= R_m \left[1 + \frac{R_0}{R_m} (1 - e^{-t/C_0 R_0}) \right] \\ \tilde{v}_s(t) &= V_0 \frac{R_0}{R_m + R_s} e^{-(R_m + R_s + R_0)t/C_0 R_0 (R_m + R_s)} \end{aligned} \right\} \text{ (1.3.8)}$$

である。之より $R_0 \ll R_m$, $R_s \ll R_m$ にて特殊測定を、 $C_0 R_0 \ll T$ の条件を附加し直描測定を実施し得る。茲に T はオシログラフの測定時間域であ



第1.4.1 図 測定回路



第1.4.2 図 各種二次側抵抗に対する一次側インピーダンスのオシログラム

る。

以上は瞬時現象陰極線オシログラフを対象とした記述である。今若し、増巾器を使用する事を考へる時は電圧感度が高上し、其の結果I・Gに高電圧を要せずしてオニ京大法を実施出来る。I・Gの電圧が低ければ過渡現象直視装置の技術が容易に取り入れられるから、兩者の技巧を組合せ、過渡インピーダンス直視装置を造る事も可能である。この際保安火花間隙の代りに、之に代るサイラトロンの如きを挿入する事を忘れてはならない。

併し乍ら現在の技術では、 μs 級の早い現象波に対し、歪の無い増巾器を製作するのは不可能であるから、其の適用は極く遅い現象波に限られる。

1.4 第ニ京大法に依る測定例及インピーダンス函数の算定例

1.4.1 二次側負荷抵抗の柱上変圧器

容量1KVA, 一次電圧3300 Volt, 二次電圧105 Volt, 内鉄型単相柱上変圧器を供試変圧器とし、二次側負荷抵抗の値を0, 10, 30, 50, 100, 150, 300, 500Ω の8種類に変更しつつ、各場合の一次側インピーダンスを測定した。衝撃電圧発生回路及測定回路の定数はオニ京1.4.1図に示される如きものである。この場合、衝撃電圧発生回路の内部抵抗は略 $200\text{k}\Omega$, 測定時間域が $300\mu\text{s}$ に於て出力波は略矩形波とみてよい。標準抵抗の値を $20\text{k}\Omega$, R_m/R_s を10に換へてあるから、 $v_x(t)$ 自身で $x(t)$ を代表せしめれば誤差をまねかれない、即(1.3.3)に従ふ算定處理を必要とする。

(i) オシログラム

第1.4.2図[1]~[8]はそのオシログラムであつて、ブラウン管オシログラフの球形歪みを矯正すれば、予期の如く $v_s(t)$ は略矩形波を形成する。

この際の時較正波は100Kcである。負荷抵抗の小さい時 $v_x(t)$ は單純な減衰振動波で、負荷抵抗が増大すると共に振動は制動され、負荷抵抗 300Ω 近辺で非振動となる。之等波形は比較的單純であるから、その実験式は相當に近似したものを作成出来る。

(ii) 実験式

波形が振動・非振動の二種類に分たれるので、オシログラムを視察し、次の如き二形式を $v_x(t)$ に適用する。

$$v_x(t) = V_s \left\{ A e^{-\alpha t} \sin \omega t + B (1 - e^{-\beta t}) \right\} \text{-----} (1.4.1)$$

$$v_x(t) = V_s \left\{ A (e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}) + B (1 - e^{-\beta t}) \right\} \text{-----} (1.4.1')$$

$$\text{実験式 } V_x(t) = [Ae^{-\alpha t} \sin \omega t + B(1 - e^{-\beta t})] V_s$$

$$V_x(t) = [A(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}) + B(1 - e^{-\beta t})] V_s$$

$r(\Omega)$	A	B	α	β	ω
0	0.83	0	1.6×10^4	0	1.30×10^5
10	0.825	0.067	2.25×10^4	1.33×10^5	1.29×10^5
30	0.818	0.151	2.95×10^4	1.33×10^5	1.27×10^5
50	0.81	0.24	3.54×10^4	1.33×10^5	1.26×10^5
100	0.795	0.46	5.0×10^4	1.33×10^5	1.20×10^5
150	0.782	0.64	6.0×10^4	1.33×10^5	1.02×10^5
	A	B	α_2	β	α_1
300	4.03	12.0	7.62×10^4	1.33	9.14×10^4

第1.4.1表 オシログラムより算出した実験式の諸定数

$$V_x = \frac{f_1 p^2 + g_1 p + h_1}{a_1 p^3 + b_1 p^2 + c_1 p + d_1}$$

$r(\Omega)$	a_1	b_1	c_1	d_1	f_1	g_1	h_1
0	0	1	0.32	1.72	0	1.08	0
10	1	1.78	2.32	2.29	1.15	1.46	0.153
30	1	1.92	2.48	2.26	1.24	1.50	0.341
50	1	2.04	2.66	2.28	1.34	1.58	0.547
100	1	2.33	3.02	2.25	1.57	1.88	1.03
150	1	2.53	3.12	2.03	1.70	2.15	1.30
300	1	3.23	3.92	1.85	2.19	3.82	2.22

第1.4.2表 実験式のインピーダンス函数

$$M(p) = a_2 p^3 + b_2 p^2 + c_2 p + d_2$$

$r(\Omega)$	a_2	b_2	c_2	d_2
0	0	11	244	18.9
10	11	184	24.1	25.0
30	11	19.9	25.8	24.5
50	11	21.1	27.6	24.5
100	11	24.1	31.3	23.7
150	11	26.1	32.2	20.3
300	11	33.3	39.3	18.1

第1.4.3表 分母の諸係数

茲に V_s は $v_s(t)$ の最高値である。偏位球形歪及、非直線掃引の歪みを矯正し、 N, α, β , 及 ω の四値をオシログラム上から決定した結果を整理一括表示すれば、第1.4.1表の如くなる。

(1.4.1)を演算子函数に変換すれば結局兩式共に

$$V_x(p) = \frac{f_1 p^2 + g_1 p + h_1}{a_1 p^3 + b_1 p^2 + c_1 p + d_1} V_s \quad \text{----- (1.4.2)}$$

とする。演算子 $10^3 p$ を訛に演算子 p に置き換へ (1.4.2) の各係数を算出すれば第1.4.2表の如くである。

(iii) インピーダンス函数の計算

(1.3.1)より、この場合の算定式をよせば

$$Z_x(p) = 20 \cdot 10^3 \frac{V_x(p)}{11 V_s - V_x(p)} \Omega \quad \text{----- (1.4.3)}$$

とする。(1.4.2)を用ひ、 $0 \sim 300 \Omega$ に至る各種負荷抵抗 R に就て各箇算出するに、何れも次の形式とする。

$$Z_x(p) = 200 \frac{f_1 p^2 + g_1 p + h_1}{a_2 p^3 + b_2 p^2 + c_2 p + d_2} \Omega \quad \text{----- (1.4.4)}$$

分母を $M(p)$ で表しこの係数を算出した結果を第1.4.3表に示す。

(1.4.4)が求めるインピーダンス函数である。

(iv) 等価回路の作成

(1.4.4)の分母 $M(p)$ を因数分解し、部分分数に展開する。然る後、各分數を p の一次分數に展開すれば、二種類の展開形式を得る。即ち

$$Z_x(p) = \frac{1}{c_1 p + \frac{1}{R_1}} + \frac{1}{c_2 p + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + L_p}} \quad \text{----- (1.4.5)}$$

及

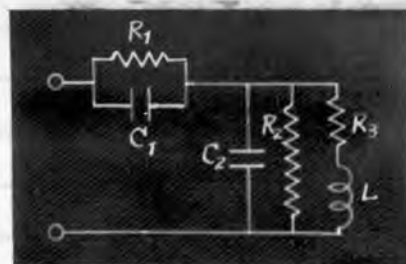
$$Z_x(p) = \frac{1}{c_1 p + \frac{1}{R_1}} + \frac{1}{c_2 p + \frac{1}{\frac{1}{c_3 p + \frac{1}{R_3}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{L_p}}} \quad \text{----- (1.4.5)'}$$

を得る。明かにこの展開形式は一つの電気回路から求め得られる形式と一致して居る。即 $Z_x(p)$ から其の等価回路を誘導したものに外ならない。

而して、 $Z_x(p)$ の等価回路は二種類の形式を生ずる事にある。假りに、(1.4.5) に依るものを第一等価回路 (1.4.5) 式のものを第二等価回路と名付ければ、第1.4.3図及第1.4.4図に示す如きものとなり、其の各部定數値は第1.4.4表及第1.4.5表に示す値とする。

$$Z(p) = \frac{1}{C_1 p + \frac{1}{R_1}} + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{L p + R_3}}}$$

γ	R_2	R_3	R_1	C_2	C_1	L
0 Ω	88.4 $K\Omega$	0 $K\Omega$	0 $K\Omega$	509 μF	∞	0.11
10	59.3	0.102	1.12	489	6732	0.119
30	45.3	0.269	2.52	466	3037	0.125
50	39.2	0.413	4.05	437	1894	0.135
100	31.3	0.794	7.98	367	984	0.165
150	29.3	1.53	11.3	314	729	0.221
300	40.6	5.89	19.3	122	431	0.683

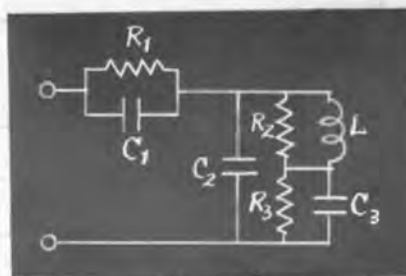


第1.4.3図 第一等価回路

第1.4.4表 第一展開形式

$$Z(p) = \frac{1}{C_1 p + \frac{1}{R_1}} + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{\frac{1}{R_2 + \frac{1}{L p}} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{C_3 p}}}}$$

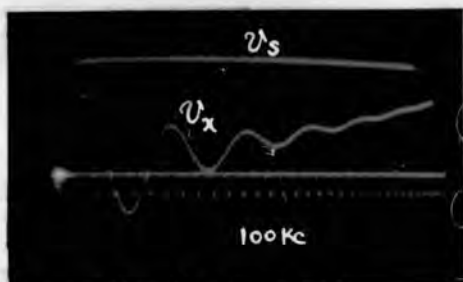
γ	R_2	R_3	R_1	C_3	C_2	C_1	L
0 Ω	88.4 $K\Omega$	0 $K\Omega$	0 $K\Omega$	$\infty \mu F$	509 μF	$\infty \mu F$	0.11 H
10	59.3	0.103	1.12	0.019	490	6730	0.117
30	45.3	0.267	2.52	0.0106	466	3030	0.123
50	39.2	0.408	4.05	0.00935	437	1890	0.134
100	31.3	0.774	7.99	0.0067	367	984	0.161
150	29.3	1.5	11.3	0.0049	314	727	0.21
300	40.6	5.15	19.3	0.0028	121	430	0.278



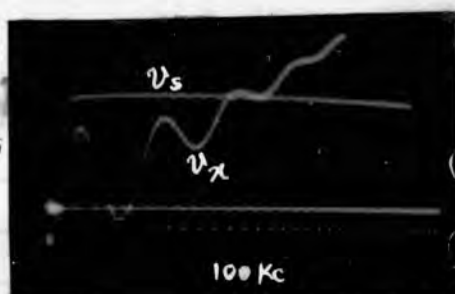
第1.4.4図 第二等価回路

第1.4.5表 第二展開形式

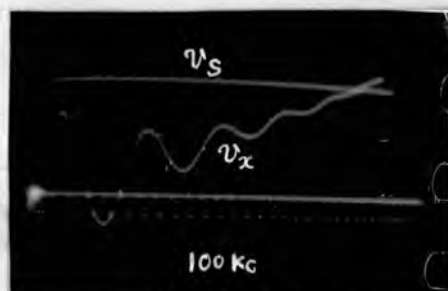
[1]

 $C = 2 \mu F$ 

[3]

 $C = 0.5 \mu F$ 

[2]

 $C = 1 \mu F$ 

[4]

 $C = 0.25 \mu F$ 

第1.4.5図 各種=次側容量に対する一次側インピーダンスのオシログラム

茲で注目すべきは、 L, C_1, C_2 等の非抵抗定数も一様に r の函数として値を変化する事実である。この事柄は一つの r に対し一つの等価回路が従属する丁を示し、 r は直接には、等価回路の何の枝路にも属さない丁を表してゐる。

1.4.2 二次側容量負荷の柱上変圧器

前と同一の変圧器を同一の測定回路に接続し、二次側抵抗を、静電容量0.25, 0.5, 1, 及2 μF の蓄電器4種に換んだ時の一次側インピーダンスを測定した。測定回路は前の第1.4.1図と同一である。

(i) オシログラム

時間域300 μs 程度に於て実測したオシログラムを示せば*1.4.5図[1]~[4]の如くなる。この場合の $v_x(t)$ は前と同様単純な形式であるが、時間と共に増大し上昇性を保ったまま、測定時間域を逸脱する。若し充分な長期間 $v_x(t)$ を観察すれば、 $v_x(t)$ は一旦上昇後減衰することが確かめられるが今の場合は時間域を300 μs に限定して、そのインピーダンス函数及等価回路を観察することにする。

(ii) 実験式の作成

オシログラムを観察し、且つ物理的意味を勘考した結果、次の如き実験式を成立せしめる。

$$v_x(t) = V_s \left\{ A e^{-\alpha t} \sin \omega t + B(1 - e^{-\beta t}) \right\} \text{-----} (1.4.6)$$

この式のオ=項を直線上昇函数例へば $B\beta t$ と置く丁は物理的意味から不可である。この4種類の値に対し、 α, β, ω 及 A, B を5個の値を決定し、*1.4.6表に示した。(1.4.6)を演算子函数に変換せる結果は前例同様次の形式となる。但、記号を簡単にするため演算子 $10^3 p$ は新に p で表す。

$$V_x(p) = \frac{f_1 p^2 + g_1 p + h_1}{a_1 p^3 + b_1 p^2 + c_1 p + d_1} V_s \text{-----} (1.4.7)$$

この式の各係数の値を算出表示すると、第1.4.7表に示す如くなる。

(iii) インピーダンス函数の計算

(1.4.3)を使用し(1.4.7)をこれに入れ整理すれば結局インピーダンス函数は

$$Z_x(p) = 200 \frac{f_1 p^2 + g_1 p + h_1}{a_2 p^3 + b_2 p^2 + c_2 p + d_2} \Omega \text{-----} (1.4.8)$$

となる。分母を $M(p)$ として、この係数を算出表示すれば、*1.4.8表を得る。之が求める結果である。

(iv) 等価回路の作成

$$v_2(t) = A e^{-\alpha t} \sin \omega t + B(1 - e^{-\beta t})$$

C	A	B	α	ω	β
2 M \ddot{t}	0.81	11	$1.78 \cdot 10^4$	$1.31 \cdot 10^3$	$2.22 \cdot 10^3$
1	0.79	11	$1.83 \cdot 10^4$	$1.35 \cdot 10^3$	$4.27 \cdot 10^3$
0.5	0.725	11	$1.87 \cdot 10^4$	$1.39 \cdot 10^3$	$7.95 \cdot 10^3$
0.25	0.648	11	$1.94 \cdot 10^4$	$1.44 \cdot 10^3$	$1.28 \cdot 10^3$

第1.4.6表 実験式及諸定数

$$V(p) = \frac{f_1 p^2 + g_1 p + h_1}{a_1 p^3 + b_1 p^2 + c_1 p + d_1}$$

C	a_1	b_1	c_1	d_1	f_1	g_1	h_1
2 M \ddot{t}	1	37.8	17.6	38.9	127	1.097	427
1	1	40.9	18.8	78.4	154	2.17	872
0.5	1	45.4	20.1	157	190	4.08	1733
0.25	1	51.6	21.6	270	234	5.86	2970

第1.4.7表 実験式のインピーダンス函数

$$M(p) = a_2 p^3 + b_2 p^2 + c_2 p$$

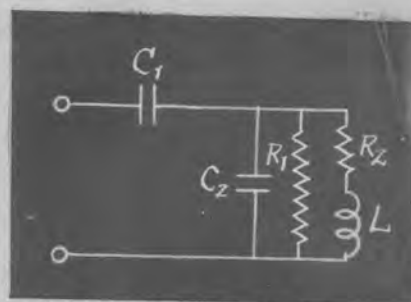
C	a_2	b_2	c_2
2 M \ddot{t}	11	0.285	0.192
1	11	0.296	0.204
0.5	11	0.311	0.216
0.25	11	0.334	0.231

第1.4.8表 分母の係数

$$Z(p) = \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + Lp}}}$$

C	C_1	C_2	R_1	R_2	L
2 M \ddot{t}	2250 M \ddot{t}	518 M \ddot{t}	89.6 K Ω	494 Ω	0.111 H
1	1170	516	105	880	0.106
0.5	646	550	145	1480	0.0936
0.25	388	590	365	2160	0.0844

第1.4.9表 展開の第一形式

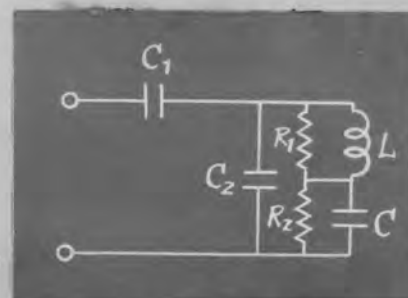


第1.4.6図 第一等価回路

$$Z(p) = \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{\frac{1}{R_1 + Lp} + \frac{1}{C_3 p + \frac{1}{R_2}}}}$$

C	C_1	C_2	C_3	R_1	R_2	L
2 M \ddot{t}	2250 M \ddot{t}	518 M \ddot{t}	258 M \ddot{t}	87.6 K Ω	0.491 K Ω	0.111 H
1	1170	516	115	105	0.873	0.105
0.5	646	550	434	145	1.47	0.0926
0.25	388	596	107	365	2.15	0.0839

第1.4.10図 展開の第二形式



第1.4.7図 第二等価回路

(1.4.8)を分解して、 p の一次分數式に展開する時は、次の如き=種類の展開形式を求め得る。

$$Z_x(p) = \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + L_p}} \quad \text{----- (1.4.9)}$$

$$\text{及} \quad Z_x(p) = \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p + \frac{1}{\frac{1}{C_3 p + \frac{1}{R_3}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_p}}} \quad \text{----- (1.4.10)}$$

其の各々に対する係數表は第1.4.9表及第1.4.10表に算出表示してある。前者の表す等價回路をオ一等價回路、後者の夫をオニ等價回路と名付け、図示すれば、オ1.4.6図及オ1.4.7図の如くなる。前例同様、全定數は C に対し函數的变化をなす事が判る。

1.5 結 言

福田氏法の利處は、インディシヤル・インピーダンスが直描出来る丁にあり、缺處は直流が流通し難い回路の測定が不可能となる丁である。オ一京大法は福田氏法の如き缺處はないが、其の不利とするところは、測定精度が低い事である。オニ京大法はオ一京大法の改良であつて精度が向上し、

特殊の測定條件ではインディシヤル・インピーダンスを直描する丁が可能である。非直描の測定状態では、計算に依りインピーダンス函數を見出す丁が出来る。斯様にインピーダンス函數を見出した時は、其の數式を p の一次分數式に展開し、等價回路を見出す事も出来る。本章では其の計算実施例として、柱上変圧器の二例に就て結果を示して置いた。

第二京大法は、可及的高電圧の衝擊電圧發生裝置を使用する共に於て、電磁誘導障害、測定線の長大化、波頭峻度の低下現象、其の他の対策に諸般の技術を要する不便があるが 高電圧を使用する程、インディシヤル・インピーダンスの定義に近い測定形式となる共に、又不完全な測定状態を作つても、補助的計算を行つて、正しい値を求められる共に長所が存在する。

第 II 章

第=京大法に対する現象演算法の適用
及其の拡張

2.1 緒言

Duhamel の積分定理、若くは演算子法上の Borel の定理として、知られるところの相乗定理は、図形的に実数計算を行ふ丁が容易であつて、例へば Nerken 氏の考案¹⁾の如きが其の一例である。筆者は観測に依り得られる時間函数は、總べてこの相乗計算に掛け得る事を知り之より次第に發展して、徹底的に相乗定理を武器とする過渡現象演算理論を成立せしむるに至つた。現象演算法なる名稱は斯様な演算理論に附した名稱である。この演算法で若し観測結果を基礎とすると云ふ制限事項を付けをければ、其の内容は相乗演算法と改稱しても差支への無いものである。本章では第=京大法に依るインディシヤル・インピーダンスの測定にこの現象演算法を適用する原理を説明し、尚多數の实测オシログラムを収録し、之に対して行つた現象演算例を紹介する。

次に補足として、アドミッタンス及電圧、電流比算定への拡張論と電圧電流波形から一般的にインディシヤル・インピーダンスを算定する原理及实例を述べる。尚当初の 2.2 に之等を理解するに足る現象演算の記法を解説する。

さて、現象演算法を第=京大法に取入れる根本的思想は、次の如きものである。元素第=京大法は、直描測定を理想とするものであるから、前章のインピーダンス函数を求める計算は、非直描の測定誤差を補正して居るのと同じである。然るに一般電気機器のインディシヤル・インピーダンスは一般に複雑な波形であるから、実験式でこれを正確に表現する丁は、頗る困難乃至不可能となる丁が多い。従つて斯様な場合 $v_x(t)$ は同様に複雑な波形とする爲、その実験式は通例 $v_x(t)$ の大要を表現せしめるに止める。

この爲演算子法に依りインピーダンス函数を算定して見ても、最早それは實際のインディシヤル・インピーダンスの大綱を示すのみで、眞実の微細構造は不明の儘残される。若しオシログラムに表れた図形的函数を、実験式及演算子函数に変換する様なことをせず、其の儘図形的に取扱ひ、若干の處理を経て、求めるインディシヤル・インピーダンスを、図形的に決定出来得るならば、実験式乃至演算子函数を使ふよりも一層直接的である。

¹⁾ Nerken: EE 56, 768 (1937)⁽⁷⁾

現象演算法は斯様な要望を満す可く考案されたものであつて、測定方法の改善と相俟つて、インディミヤル・イニポーダニスの測定法に厳密な根拠を與へるものと見る事が出来る。

2.2 現象演算法の紹介

2.2.1 現象函数

現象函数とは、時間函数であるが、特に観測に依り得られた性質のものを謂ふ。この時の観測は実測に限り、思考実験に依る如き観測は含まない。

観測結果たる制限を含め函数は單に時間函数と呼ぶ。観測結果たる制限を設けた時間函数、即ち現象函数は單價であり無限大とならず有限時間域に存在し、不連続点も有限箇となり、且つ波形分解能に基く一定の限界誤差を含有する。

2.2.2 現象演算法の記法

現象演算法の基礎は観測函数を取扱ふ事に置くが、其の制限を除けば、前記せる如く相乗演算法と同義である。而して次の記法を採ぶ。

$0 \leq t \leq T$ に於て存在する現象函数 $u_1(t), u_2(t) \dots$ 等を取つた時、之に對する次の変換が可能とする。

$$U_\nu(p) = p \int_0^\infty u_\nu(t) e^{-pt} dt \quad \text{-----} (2.2.1)$$

$$\nu = 1, 2, \dots$$

然る時 $u_1(t)$ 、及 $u_2(t)$ の相乗に對する Borel の定理、若くは Duhamel の定理の關係を次の記号で以て表現する。

$$u_1(t) * u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{U_1(p) U_2(p)}{p} e^{pt} dp \quad \text{---} (2.2.2)$$

或は

$$u_1(t) * u_2(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) d\tau \quad \text{---} (2.2.2)'$$

記号 $*$ を相乗記号と呼ぶ。記号 $*$ に関しては (2.2.2) 右辺の内容より知られる如く、演算子函数を取扱ふ場合と同様に交換則、結合則、配分則が成立つ。

同一函数を n 回相乗する場合には、次の如き記法を使用する。

$$u(t) \overset{n \text{ 個}}{*n} = \overbrace{u(t) * u(t) * \dots * u(t)} \quad \text{---} (2.2.3)$$

n が分数若しくは非整数であつても形式的に

$$u(t)^{*n} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{U(p)^n}{p} \varepsilon^{pt} dp \quad \text{-----} (2.2.3)'$$

とする。

次に $U_1(p)$ と $U_2(p)$ の除算の演算を考へ、

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{U_1(p)}{U_2(p)} \frac{\varepsilon^{pt}}{p} dp \quad \text{-----} (2.2.4)$$

が存在するものと假定する。然る時は記号 \sim を以て

$$\varphi(t) = \frac{u_1(t)}{u_2(t)} \quad \text{-----} (2.2.4)'$$

と書き、この演算を相除演算、記号 \sim を相除記号と稱する。次に

$$\frac{H(t)}{u_2(t)} = u_2(t)^{* -1} \quad \text{-----} (2.2.5)$$

と書き、 $u_2(t)^{* -1}$ を以て $u_2(t)$ の相反函数と呼ぶ。

$u_2(t)^{* -1}$ が衝撃函数を含む結果となる時は

$$\underbrace{\sim}_{n \text{ 個}} u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{p^{n-1}}{U_2(p)} \varepsilon^{pt} dp \quad \text{-----} (2.2.6)$$

が存在せしめる整数 n が存在する場合に

$$u_2(t)^{* -1} = \frac{d^n}{dt^n} \underbrace{\sim}_{n \text{ 個}} u_2(t) \quad \text{-----} (2.2.5)'$$

とする。(2.2.4) と (2.2.5) を組合せて相除演算を相乗演算に変換する方式が得られる。即

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ u_1(t) \underbrace{\sim}_{n \text{ 個}} u_2(t) \right\} \quad \text{-----} (2.2.4)''$$

となる。 $u_2(t)^{* -1}$ に衝撃函数を含みぬ時は $n=0$ に取られる可きである。

尚現象演算法で慣用する記号の内、関係する重要なものを列記すれば次の通りである。

$$H(t) = H(t)^n = H(t)^{*n} \quad \text{-----} (2.2.7)$$

$$H(t \pm VT) = H(t \pm T)^{*V} \quad \text{-----} (2.2.8)$$

$$u(t) * H(t \pm T) = u(t \pm T) \cdot H(t \pm T) \quad \text{-----} (2.2.9)$$

$$u(t) * u(t)^{* -1} = H(t) \quad \text{-----} (2.2.10)$$

$$\frac{H(t)}{u(t)^{*n}} = u(t)^{* -n} \quad \text{-----} (2.2.11)$$

$$\frac{H(t)}{t} = t^{*-1} \cdot H(t) = S(t) \quad \text{-----} (2.2.12)$$

$$\frac{u_1(t) * u_2(t)}{u_3(t) * u_4(t)} = \frac{u_1(t)}{u_3(t)} * \frac{u_2(t)}{u_4(t)} \quad \text{-----} (2.2.13)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{ccc} u_{11}(t) & \text{-----} & u_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(t) & \text{-----} & u_{nn}(t) \end{array} \right\| * \left\| \begin{array}{cc} v_{11}(t) & v_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots \\ v_{n1}(t) & v_{nn}(t) \end{array} \right\| \\ &= \left\| \begin{array}{ccc} \sum_{s=1}^n u_{1s}(t) * v_{s1}(t) & \text{-----} & \vdots \\ \vdots & \sum_{s=1}^n u_{ps}(t) * v_{s\lambda}(t) & \text{-----} \\ \vdots & \vdots & \sum_{s=1}^n u_{ns}(t) * v_{sn}(t) \end{array} \right\| \quad \text{-----} (2.2.14) \end{aligned}$$

$$\|u(t)\|^{*-1} = \|u(t)\| \text{ の相乗逆マトリックス } \quad \text{-----} (2.2.15)$$

以上の外、演算子法に於て乗除の形式で書かれる殆ど無数の演算子函数式は、各乗除毎に相乗及相除記号を挿入した現象演算法に変換可能である。

2.3 第二京大法の測定例及び其の補正

2.3.1 補正の原理

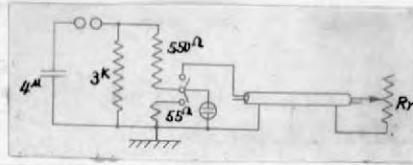
前節の記法を使用して、 ϕ = 京大法に内聯する一切の量を時間函数に変換すれば、前章(1.3.1)は次式となる。

$$z_x(t) = \frac{v_x(t)}{v_s(t) + \frac{z_s(t)}{z_m(t)} * [v_s(t) - v_x(t)]} * z_s(t) \quad \text{-----} (2.3.1)$$

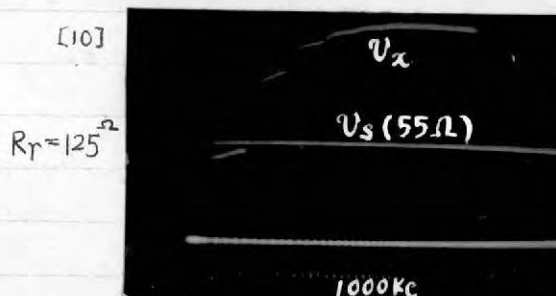
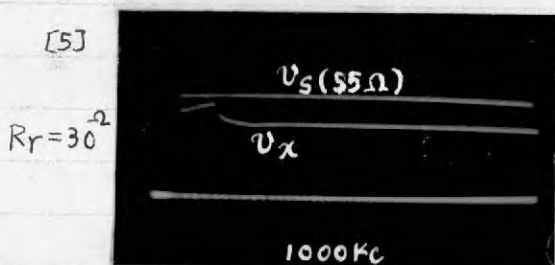
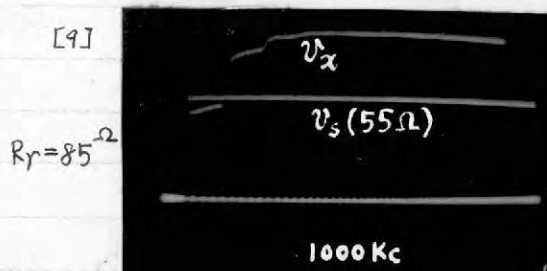
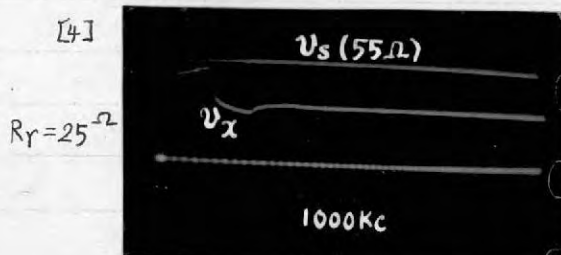
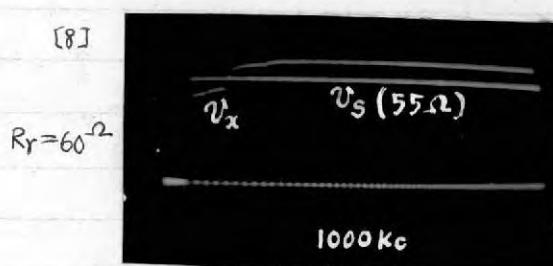
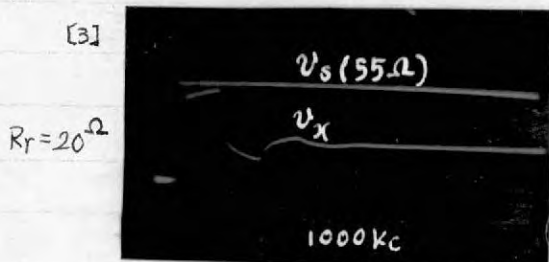
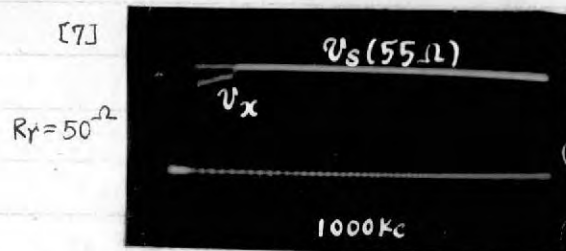
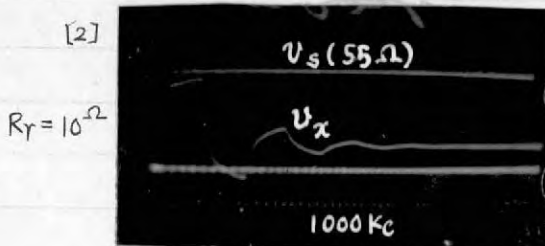
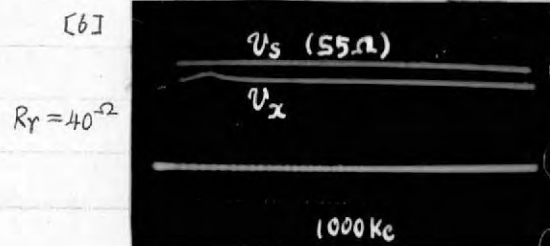
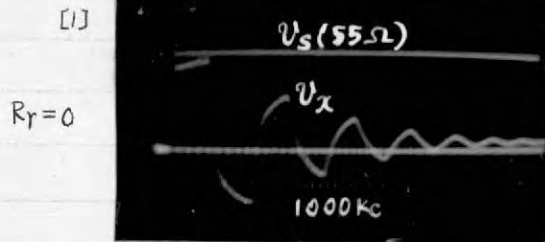
茲に、 $z_m(t)$, $z_s(t)$, 及 $z_x(t)$ 等の諸量は夫々インディシャル・インピーダンスを表してゐる。 $v_s(t)$ 及 $v_x(t)$ はオシログラムに出現する図形夫自作である。

(2.3.1)は形式的に次の如き相乗累級数に展開する丁が出来る。

$$\begin{aligned} z_x(t) &= \frac{z_m(t)}{z_m(t) + z_s(t)} * \frac{v_x(t)}{v_s(t)} * \left[H(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{z_s(t)}{z_m(t) + z_s(t)} * \frac{v_x(t) * v_s(t)^{\nu-1}}{v_s(t)} \right) \right] \\ &\quad * z_s(t) \quad \text{-----} (2.3.2) \end{aligned}$$



第2.3.1図 測定回路



第2.3.2図 各種終端抵抗に対するケーブルの入端インピーダンス

漸次相乗累級数が収束する条件は、附録Iに記載した、相乗累級数の収束条件より

$$\frac{z_m(0)}{z_m(0)+z_s(0)} \cdot \frac{v_x(0)}{v_s(0)} < 1 \quad \text{----- (2.3.3)}$$

である。 $v_x(t)$ 其の他の形状に依り収束が非常に遅々とする場合もあるから、収束条件は極力1より小に選ぶ外、 $0 < t < T$ に於て取った項比も可及的1より小になるべく選ぶべきである。若し $z_m(t)$ 及 $z_s(t)$ に抵抗 R_m 及 R_s を使用し $v_s(t)$ を定数 V_s とした場合には、

$$z_x(t) = \frac{m-1}{m} R_s \frac{v_x(t)}{V_s} * [H(t) + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \frac{v_x(t)}{V_s} \right)^{*v}] \quad \text{--- (2.3.4)}$$

$$\text{但し } m = \frac{R_m + R_s}{R_s}$$

となる。其の収束条件は

$$\frac{1}{m} \frac{v_x(0)}{V_s} < 1 \quad \text{----- (2.3.4)'}$$

である。特に $v_x(t)/m V_s$ が1より相当小さい場合 $v_x(t)$ が異常に急激な変化乃至振動を重ねなければ (2.3.4) の展開式は第一項乃至第二項で打ち切つて充分である。そしてオメガ大法は大抵の場合直描に近し測定を施行しながら若干の偏差を修正する形となるから (2.3.4) を補正計算と呼んで内容的には差支へない。

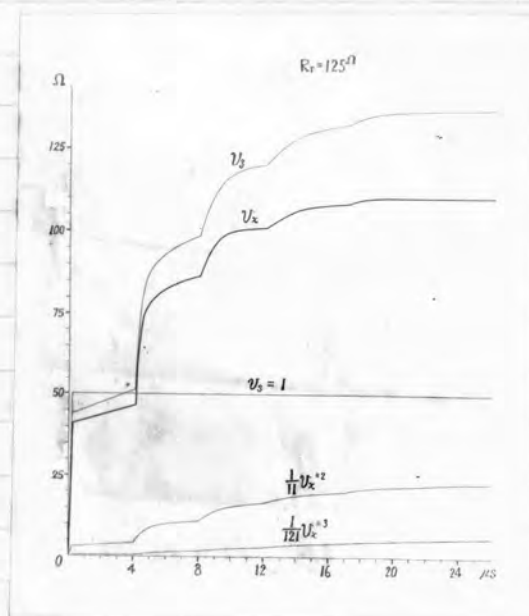
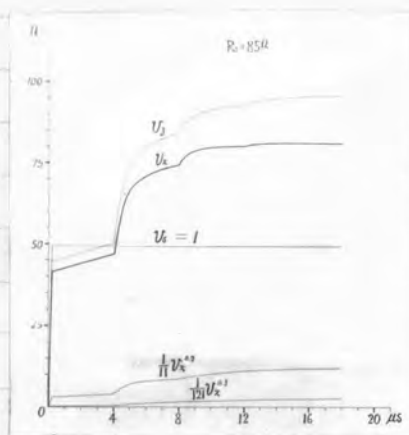
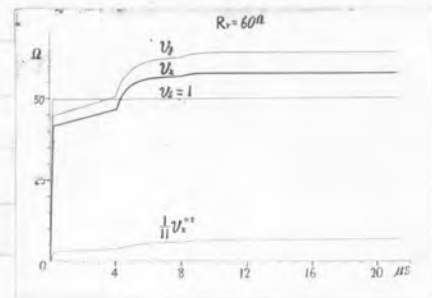
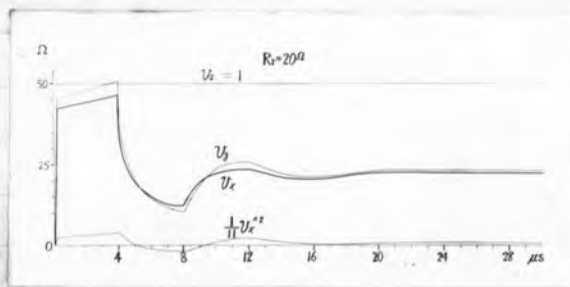
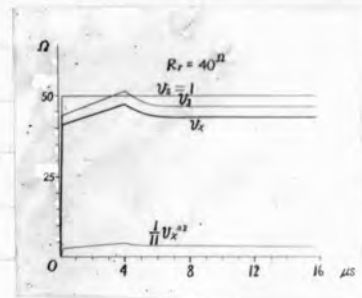
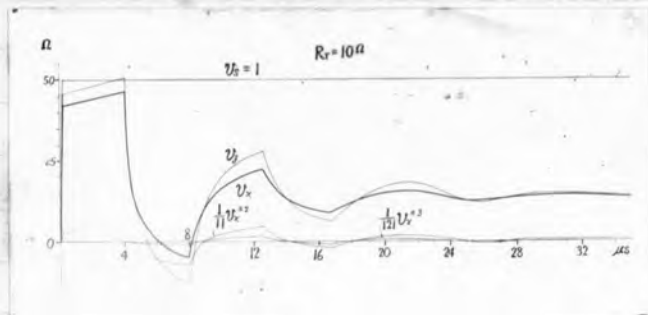
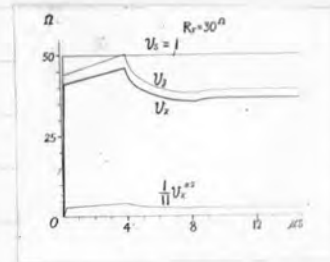
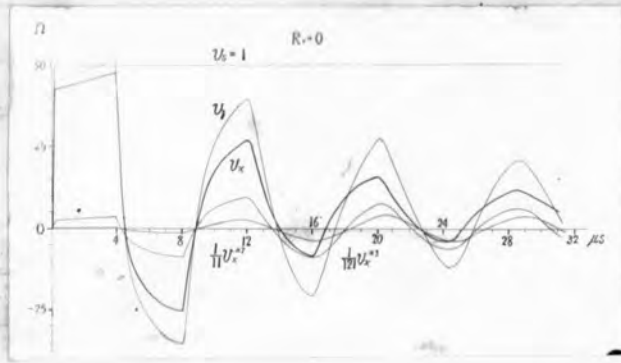
以下ニミの实例を紹介するが何れも補正計算の語を使用する。

2.3.2 抵抗終端ケーブルの測定及補正例

減衰損失が存在するケーブルに於て、終端抵抗を種々の値に変化した場合、インディミナル・インピーダンスが図形的に如何なる消長を辿り行くかと言ふ丁を命題として、測定を施行する丁とし、前章に於て行つたと同様の非直描状態下のオメガ大法を行つた。

供試ケーブルは古河電気工業製の二心乾紙ケーブルであつて、其の構造は、直径1.3mmの軟銅線に、直径0.6mmのコルデルを纏巻し之を更に紙覆後、二本捻合し、外径10.6mmになる乾紙巻の上、厚さ1.5mmの鉛鍍を施したものである。

測定は同ケーブル二心の各心線一括鉛被内に就て行ひ、用いた回路は、第2.3.1図の如くである。ケーブルの使用全長は450m 終端抵抗 R_r は0, 10, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 85, 125 Ω の10種類に取り、之に対する R_m として550 Ω 、 R_s として55 Ω を選んだ。この時 $R_m/R_s = 10$ となり、前章の



第 2.3.3 図 補正計算例

場合と同値である。

(i) オシログラム

時間域として $50\mu\text{s}$ を取った時、得たオシログラムは第 2.3.2 図 [1] から [10] に示す如くである。時間較正波は $1000\text{K}\Omega$ であつて $v_s(t)$ は波頭、波尾芝刈ど完全な矩形波である。 $v_x(t)$ は時刻が $4\mu\text{s}$ に達する迄は、全部同一の形状を取り、ケーブルの波動インピーダンスの消長を現す。而して波動インピーダンスは一定値でなく、時間と共に上昇する様が明瞭に著取出来る。

$R_T=0$ の時のケーブル定常インピーダンスは 5Ω であるが、之はケーブル導体の直流抵抗と良く一致する。 $R_T<40\Omega$ に於て振動性インピーダンスになり、 $R_T>40\Omega$ で非振動となる。

(ii) 補正計算

補正計算式 (2.3.4) は、この場合次の如くする。

$$z_x(t) = 50 \left[\frac{v_x(t)}{V_s} + \frac{1}{11} \frac{v_x(t)^{*2}}{V_s^2} + \frac{1}{121} \frac{v_x(t)^{*3}}{V_s^3} + \dots \right] \Omega \quad (2.3.1)$$

収数の遅速は $v_x(t)/V_s$ に依り左右されるから、実際に計算の結果、満足すべき範囲内に誤差を止めて、項数を打切る。相乗計算は実施時間隔を最短の $25\mu\text{s}$ に取り、必要の場合には任意に中間点を寫した。其の実施上の計算誤差は僅かで、結果が滑かな曲線となる状態極めて満足すべきものであつた。第 2.3.3 図は実算の結果を示す曲線であつて、 $V_s=1$ に基準化した場合の

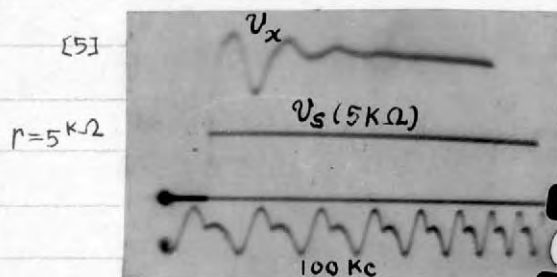
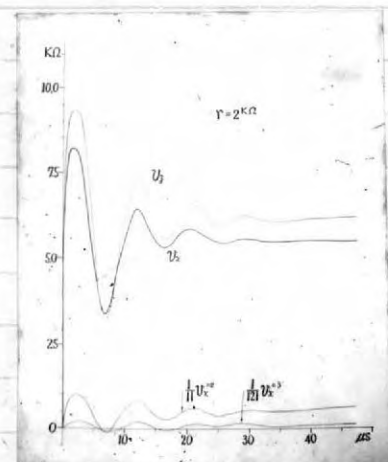
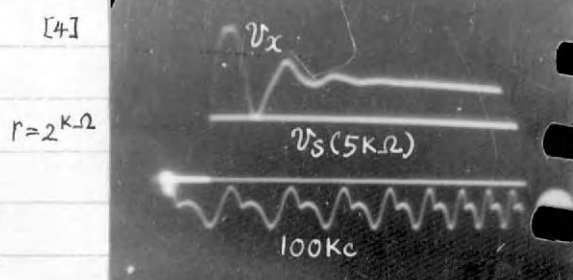
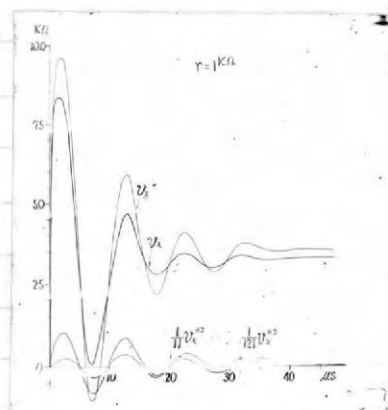
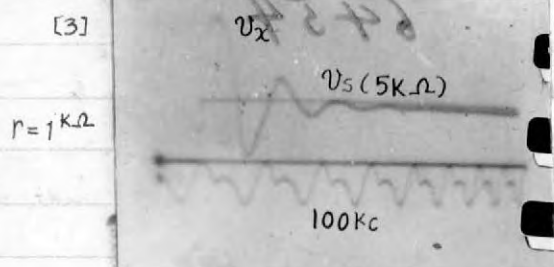
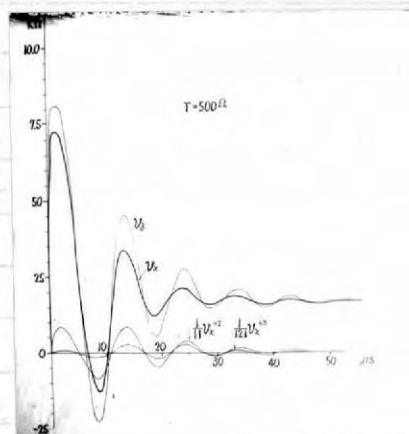
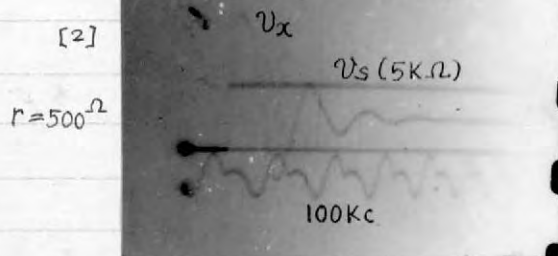
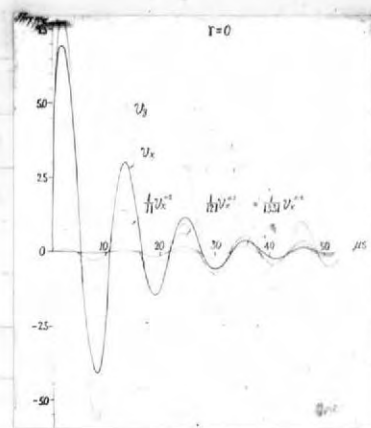
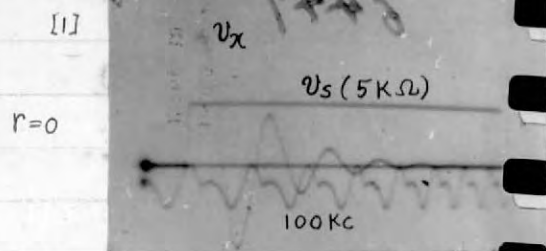
$$v_g(t) = v_x(t) + \frac{1}{11} v_x(t)^{*2} + \frac{1}{121} v_x(t)^{*3} + \dots \quad (2.3.2)$$

を表してある。実測値の儘の $v_x(t)$ を太く、其の他の修正項及總和結果を細く描いてある。縦軸目盛は (2.3.1) を表す様にとつてあるので $v_g(t)$ をこの目盛で讀めば、之が直ちに $z_x(t)$ を與へる。若し $V_s=1$ なる基準線に 55Ω の目盛とし $v_x(t)$ を讀めば、 $R_T=40\Omega$ 附近では、 $v_x(t)$ から讀んだインピーダンスも $v_g(t)$ から出したインピーダンスも其の差は殆どない。

即ちこの場合には、たとへ $R_m/R_s=10$ の程度であつても、直読測定の形になつてゐる丁は注意を要する。

2.3.3 抵抗負荷せる変圧器の測定及補正例

試したものは、京都大学構内設置の 900KV 高電圧発生装置入力側の絶縁用区分変圧器である。其の一次電圧 3500V 二次 5000V 、 150KVA の容量を有する。一次側に抵抗を接続し、其の値を可変しつつ、二次側から見たいンピーダンスを測定した。可変抵抗の値は $0, 500, 1\text{K}, 2\text{K}, 5\text{K}\Omega$ の



第2.3.4図 オシログラム

第2.3.5図 補正計算例

5種類であつて、衝撃電圧発生回路は $R_m = 50\text{K}\Omega$ $R_s = 5\text{K}\Omega$ に取ったことは前例と全く同一のものである。

(i) オシログラム

時間域 $80\mu\text{s}$ にて測定したものをオ2.3.4図に示す。時較正波は $100\text{K}\Omega$ である。この場合 v_x は、概ね単一減衰振動波であるが、受荷抵抗の大きい處では振動形状がやや歪曲し、簡単な実験式が適用し難い波形である。

その定常値は概ね一次抵抗に比例して上昇してある。

(ii) 補正計算

R_m と R_s の比が前例と同一であるから、 $V_s = 1$ に基準化し (2.3.2) を使用すれば良い。然る所 $z_x(t)$ は

$$z_x(t) = 4.55 v_z(t) \text{ K}\Omega \quad \text{-----} (2.3.3)$$

となる。補正計算は $v_x(t)$ が振動性である爲、相乗累級数の収斂が遅く、爲に、 $v_x(t)^{**4}$ をオ三次補正項迄取ったものである。相乗計算の実施時間隔は $1\mu\text{s}$ であつて、必要に依り更に細かく寫した。オ2.3.5図に其の結果を示す。 $v_x(t)$ は太線で他は細線で指示した。 $V_s = 1$ の線を $5\text{K}\Omega$ の目盛として讀んだ v_x の値と、 v_z の表すインピーダンスとは或るものでは相違に開くので、斯様な振動性インピーダンスに対して $R_m/R_s = 10$ 程度では直接測定形式とならぬ事情を理解できる。

2.3.3 容量受荷せる変圧器の測定及補正例

前例と同一の変圧器に対し、今度は二次側に静電容量を接續し、一次側より見たインピーダンスを測定した。接續静電容量は $0.001, 0.005, 0.01, 0.02, 0.05\mu\text{F}$ の5種類の値である。この場合の衝撃電圧発生回路は R_m, R_s の値等は前例と同一である。

(i) オシログラム

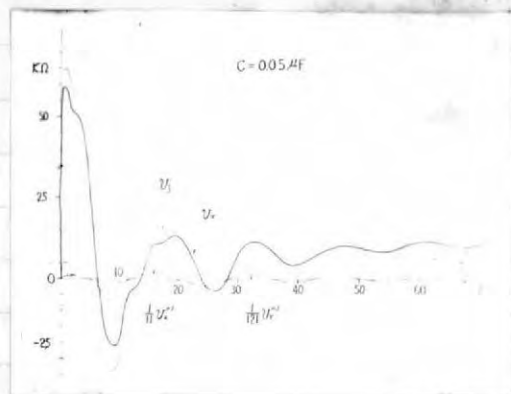
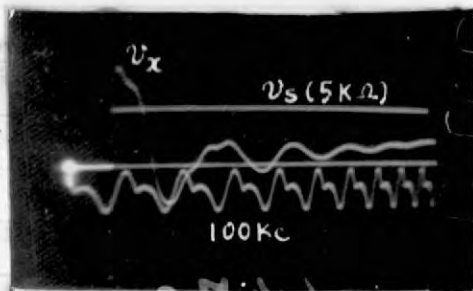
時間域が $80\mu\text{s}$ 、時較正波 $100\text{K}\Omega$ に於けるオシログラムをオ2.3.6図に示す。この掃引域では結局インピーダンスが單調に限りなく増大して行く如く見えるが、掃引域を長くすれば当然上限が現れ、次で減衰する性質のものである。 $v_x(t)$ の形状はやゝ複雑であり、少くも二種類の周波数の振動成分があり、而も之は単一減衰振動波ではない丁が着取される。

(ii) 補正計算

測定回路が同一であるから、前例と同一の計算式 (2.3.3) が使用出来る。 $V_s = 1$ に基準化し補正計算を施し、縦軸目盛を入れて第2.3.7図に其の結果を示す。 $v_x(t)$ が尻上りであるに拘らず修正項はオ2項迄で充分である丁が判る。且補正前と、補正後に於ては波形の値に開きが存在し、 R_m/R_s

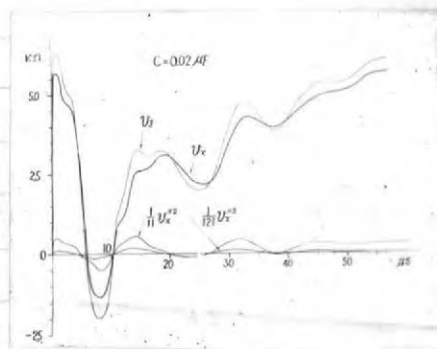
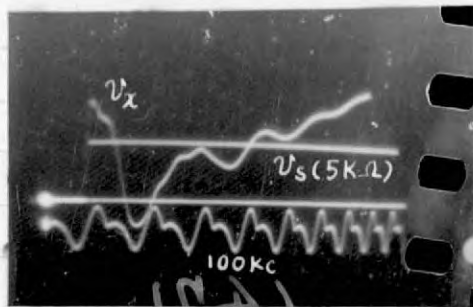
00010

[1]



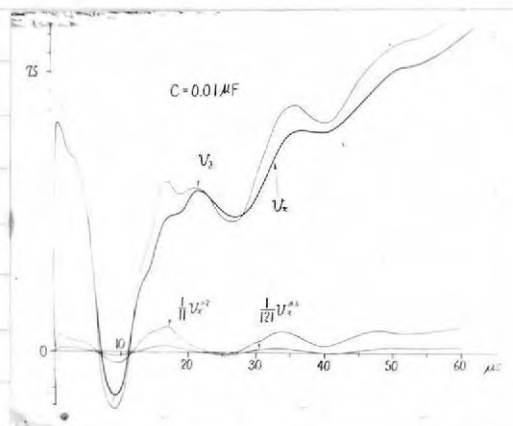
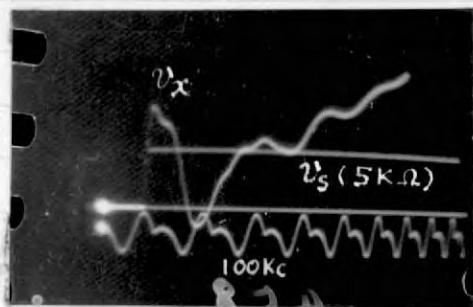
[2]

$C = 0.02 \mu F$



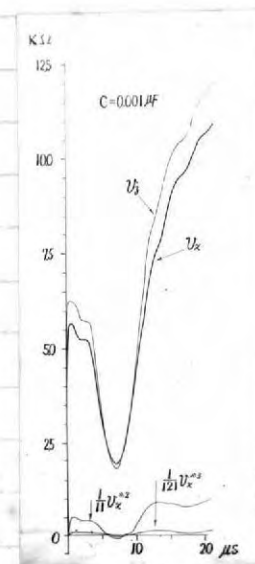
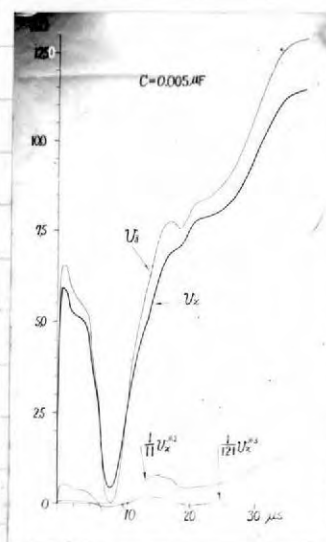
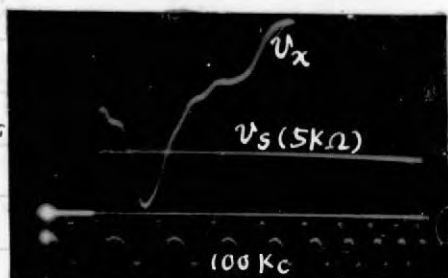
[3]

$C = 0.01 \mu F$



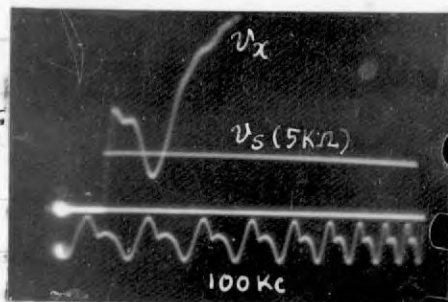
[4]

$C = 0.005 \mu F$



[5]

$C = 0.001 \mu F$



第2.3.6圖 オシログラム

第2.3.7圖 補正計算例

≈ 10 の程度では、修正計算を必要とする丁が理解される。

2.4 インピーダンス測定法を、アドミッタンス、電圧比、電流比測定法へ拡張す。

2.4.1 本節の目的

第二京大法は駆動電圧インピーダンスだけでなく、伝達インピーダンスの測定にも適用できる。 $v_x(t)$ を得る時に、オシログラフの測定電圧を伝達端子に変更するのである。この時の記録電圧を $v_m(t)$ とする。 $v_m(t)$ を得た形式は明白に伝達インピーダンスの定義と一致する。故に伝達インピーダンスの算定は(2.3.1)其他に於て $v_x(t)$ を $v_m(t)$ に置換して行へば宜敷い。

一般に駆動電圧定数及伝達定数が分明である数値の独立回路系を任意に組合せた時の電気現象は必ず解く丁が出来る。故に之等の定数を観測に依つて決定し得たならば、観測を基礎とする演算法、即現象演算法が成立する。

たゞ現象演算法に於ては、總ての回路方程式を相乗計算に歸着せしめる様に考案する丁が必要である。さて斯様の演算法に、オニ京大法を導入して、其の基礎とする丁が出来るものとすれば、インピーダンスの観測結果から、インピーダンスのみならず、アドミッタンス、電圧比、電流比等が誘導可能でなくてはならぬ。以下の拡張論に見る如く、この事は形式的に可能である。故にオニ京大法を總ての回路計算の基礎とする丁も出来る。

としてオニ京大法だけでなく、一般にインディシャル・インピーダンスを測定した結果を基礎として、總ての定数及回路計算が可能である丁が明白になる。

2.4.2 インディシャル・アドミッタンスの算定法

時間域を適当に選定し、測定したインディシャル・インピーダンスが $z(t)$ なる一つの曲線であつた場合、アドミッタンスは、 $z(t)$ の相変函数で與へられる。而して、其の誘導法は $z(t)$ の初期値如何で若干異なる。

(i) $z(t)$ の初期値が有限確定の時

$z(t)$ に近い時間函数 $g(t)$ を選定し、其の相変函数 $g(t)^{* - 1}$ を豫め求めて置く。之を求める手續は、演算子函数を中介にすれば、従来の演算子法に従ふし便宜である。この場合 $g(t)$ を $z(t)$ の現象演算法に於ける中核函数と呼ぶ。次に

$$z(t) - g(t) \equiv \delta(t) \text{ ----- (2.4.1)}$$

は $z(t)$ と中核函数の偏差を表す。これを使用すれば $z(t)$ は

$$z(t)^{* - 1} = \frac{H(t)}{g(t) + \delta(t)}$$

となる。次にこれを下の如き相乗累級数に展開する。

$$z(t)^{*1} = g(t)^{*1} * [H(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} (g(t)^{*1} * \delta(t)^{*1})^{\nu}] \dots (2.4.2)$$

其の収斂条件は附録Iより

$$g(0)^{*1} \delta(0) < 1 \text{ 或は } \delta(0)/g(0) < 1 \dots (2.4.2)'$$

である。この時(2.4.2)'は絶対収斂とする。求め得た $z(t)^{*1}$ はインディシヤル、アドミッタンス $y(t)$ に他ならない。以上の関係は、駆動系、伝達系の別無く得られるものである。

(ii) $z(0)=0$, $z'(0)$ が有限確定の場合

中核函数 $g(t)$ として、 $z(t)$ 同様の性質をもつ、即ち $g(0)=0$ として $g'(t)$ が $z'(t)$ に可及的に接近したものを採る。 $g(t)^{*1}$ を別途に見出し置き

$$g(t)^{*1} = \frac{d}{dt} \tilde{g}(t) \dots (2.4.3)$$

まる $\tilde{g}(t)$ を見出すものとする。 $\tilde{g}(t)$ は図形的に表示可能である。之を使い $z(t)^{*1}$ を求めれば(2.4.2)は次の如く変形される。

$$\begin{aligned} z(t)^{*1} &\equiv \frac{d}{dt} \tilde{z}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \tilde{g}(t) * [H(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} (\tilde{g}(t) * \delta'(t))^{\nu}] \right\} \dots (2.4.4) \end{aligned}$$

となる。前記せる如く $\tilde{z}(t)$ は図形的に表示できるから、上式は必ず図形的に計算可能である。(2.4.4)の収斂条件は

$$\tilde{g}(0) \delta'(0) < 1 \text{ 或は } \delta'(0)/\tilde{g}(0) < 1 \dots (2.4.4)'$$

である。 $z(t)^{*1}$ は $t=0$ に於て衝撃函数を含み、其の値は

$$1/\tilde{g}(0) \cdot S(t)$$

である。実測上 $z(t)^{*1}$ が衝撃函数を含むか否かは、オシログラフの時間的分解能力及測定誤差の問題であつて、物理的には衝撃函数は実在する。

(iii) $z(0)=z'(0)=\dots=z^{(n-1)}(0)=0$; $z^{(n)}(0)$ が有限確定の場合。

形式的に

$$z(t)^{*1} = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \tilde{g}(t) * [H(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} (\tilde{g}(t) * \delta^{(n)}(t))^{\nu}] \right\} \dots (2.4.5)$$

となり、此の収斂条件は

$$\delta^{(n)}(0)/\tilde{g}^{(n)}(0) < 1 \dots (2.4.5)'$$

である。然し乍ら線型回路にて表示可能なインピーダンスに対しては、 $n=1$ 以上は存在しない。

2.4.3 電圧比、電流比の算定

インディシヤル電圧比は駆動実単位函数状の電圧を印加したとき伝達端子に出現する電圧であると定義する。この際伝達端子は開放されるのを原則とする。伝達端子に任意のカイインピーダンスが結合された場合の電圧比は開放電圧比を基として計算出来るから定義に取らなない。同様にインディシヤル電流比とは駆動実単位函数状の強制電流を流通した時に短絡伝達端子に流通する電流と定義する。

(i) 電圧比の算定法

駆動実端子側のインディシヤルインピーダンスを $z_0(t)$ 、伝達端子への伝達インピーダンスを $z_m(t)$ とすれば、インディシヤル電圧比 $\eta(t)$ は

$$\eta(t) = \frac{z_m(t)}{z_0(t)} \quad \text{----- (2.4.6)}$$

で與へられる。

(ii) 電流比の算定法

駆動実を開放し、伝達端子より逆に見た回路系内のインディシヤル・インピーダンスを測定し、之を $z_i(t)$ とする。前述の $z_m(t)$ を併せ測定する丁に依り、インディシヤル・電流比 $\eta(t)$ は

$$\eta(t) = \frac{z_m(t)}{z_i(t)} \quad \text{----- (2.4.7)}$$

として與へられる。以上は總て相除演算に属する計算であるが、この計算の実例は後に示す丁とする。

2.4.4 影像定数の算定法

伝送系に於て、インディシヤル影像電圧比、電流比、駆動実インピーダンス、アドミッタンスを測定する^(整合状態を造る)目的で事は著しく困難である。併し乍ら比較的損失の甚い等質回路では、出力端開放或は短絡何れか一つの測定を行い、反射波の識別から容易に四者を求めることが出来る。併し、一般的方法としては出力端子開放短絡の二測定から形式的な理論式を運用し、現象演算を行つて目的を達する丁が出来る。

(i) 影像(波動)インピーダンス及アドミッタンスの算定

出力端短絡及開放に於て入力端インディシヤル・インピーダンスを測定し、之を $z_s(t)$ 及 $z_f(t)$ とする。然る時影像インピーダンスは

$$w(t) = (z_s(t) * z_f(t))^{*1/2} \quad \text{----- (2.4.8)}$$

である。 $\frac{1}{2}$ 相乗を処理するには、級数展開を利用する。即ち $z_s(t)$ 及 $z_f(t)$ に適当なる中核函数 $g_s(t)$ 及 $g_f(t)$ を擬定し、

$z_s(t) - g_s(t) = \delta_s(t)$, 及 $z_f(t) - g_f(t) = \delta_f(t)$ ----- (2.4.9)
なる偏差函数を見出し置く。 $g_s(t), g_f(t)$ は演算子函数 $Q_s(p), Q_f(p)$ に変換して容易に処理を行ひ得るものを探ふ。即

$$[g_s(t) * g_f(t)]^{*\frac{1}{2}} \equiv w_g(t) \quad \text{----- (2.4.10)}$$

$$w_g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\sqrt{Q_s(p)Q_f(p)}}{p} e^{pt} dp \quad \text{----- (2.4.11)}$$

とし、 $w_g(t)$ を図形的に表示し得る如く探ふ。然る時 (2.4.8) を展開し、

$$w(t) = w_g(t) * \left\{ H(t) - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\frac{\nu-1}{2}(\lambda-\frac{1}{2})}{\nu!} \left(\frac{\delta_s(t)}{g_s(t)} + \frac{\delta_f(t)}{g_f(t)} + \frac{\delta_s(t) * \delta_f(t)}{g_s(t) * g_f(t)} \right)^{\nu} \right\} \quad \text{----- (2.4.12)}$$

を得る。附録 I に記した如く、この級数が有限時間域 $0 \leq t \leq T$ に於て収斂する条件は、級数

$$1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\frac{\nu-1}{2}(\lambda-\frac{1}{2})}{\nu!} \left(\frac{\delta_s(0)}{g_s(0)} + \frac{\delta_f(0)}{g_f(0)} + \frac{\delta_s(0) \cdot \delta_f(0)}{g_s(0) \cdot g_f(0)} \right)^{\nu} \quad \text{----- (2.4.13)}$$

の収斂条件に等しい。この級数は項比を取れば明かに

$$\frac{\delta_s(0)}{g_s(0)} + \frac{\delta_f(0)}{g_f(0)} + \frac{\delta_s(0) \delta_f(0)}{g_s(0) g_f(0)} < 1 \quad \text{----- (2.4.13)'}$$

に於て絶対収斂である。

$w(t)$ の相及函数は影像アドミッタンス $\omega(t)$ を與へる。

(ii) 影像電圧比の算定

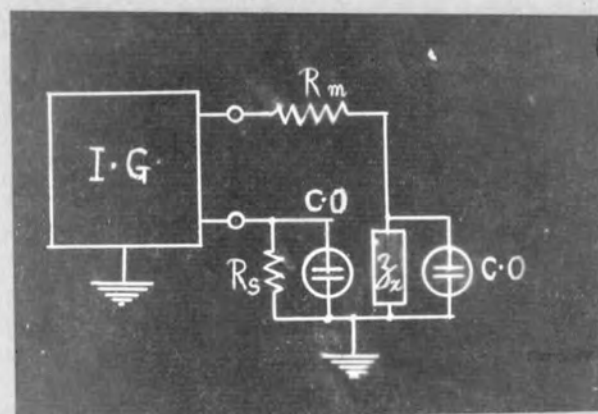
$z_s(t)$ 及 $z_f(t)$ の測定結果から形式的に影像電圧比 $\xi(t)$ は

$$\xi(t) = \left[\frac{z_f(t)^{*\frac{1}{2}} - z_s(t)^{*\frac{1}{2}}}{z_f(t)^{*\frac{1}{2}} + z_s(t)^{*\frac{1}{2}}} \right]^{*\frac{1}{2}} \quad \text{----- (2.4.14)}$$

となる。若し波動インピーダンス $w(t)$ が既知ならば上式は簡単に成り

$$\xi(t) = \left[\frac{z_f(t) - w(t)}{z_f(t) + w(t)} \right]^{*\frac{1}{2}} = \left[\frac{w(t) - z_s(t)}{w(t) + z_s(t)} \right]^{*\frac{1}{2}} \quad \text{----- (2.4.15)}$$

となる。豫め算定可能なる形式で中核函数を處理し、



第2.5-1圖 第二京大法の變形接續

$$\xi_g(t) = \left[\frac{g_f(t)^{\frac{1}{2}} - g_s(t)^{\frac{1}{2}}}{g_f(t)^{\frac{1}{2}} + g_s(t)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \sqrt{\frac{\sqrt{Q_f(p)} - \sqrt{Q_s(p)}}{\sqrt{Q_f(p)} + \sqrt{Q_s(p)}}} \frac{e^{pt}}{p} dp \quad (2.4.16)$$

$$\delta_w(t) = w(t) - g_w(t)$$

を求めて置けば、例へば $g_f(t)$ と $w(t)$ の二者に依り

$$\xi(t) = \xi_g(t) * \left[H(t) - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}} (\lambda - \frac{1}{2})}{\nu!} \left(\frac{\delta_f(t) - \delta_w(t)}{g_f(t) - g_w(t)} \right)^{\nu} \right]$$

$$* \left[H(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\pi^{\frac{\nu-1}{2}} (\lambda + \frac{1}{2})}{\nu!} \left(\frac{\delta_f(t) + \delta_w(t)}{g_f(t) + g_w(t)} \right)^{\nu} \right]$$

----- (2.4.17)

とまる。其の収斂条件は

$$\frac{\delta_f(0) - \delta_w(0)}{g_f(0) - g_w(0)} < 1 \quad \& \quad \frac{\delta_f(0) + \delta_w(0)}{g_f(0) + g_w(0)} < 1 \quad \text{-----} (2.4.17)'$$

の二者である。多くの場合 $\xi(t)$ は線路全長に対するよりも、其の往復長で與へるのが好都合の時が多く、この場合は $\xi(t)^{*2}$ を算定すれば、よいから計算が遙かに樂にする。其の応用計算例は次章に紹介する。

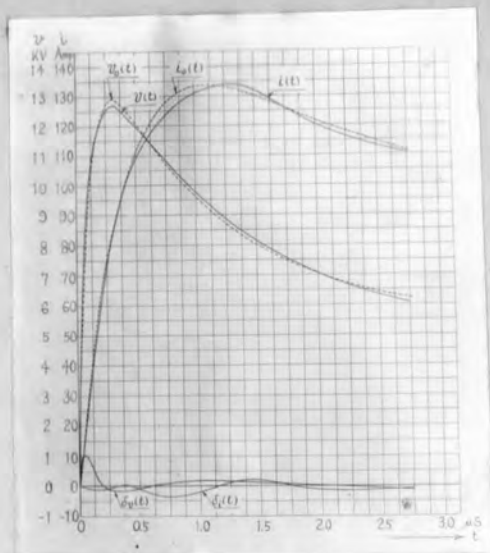
2.5 電圧、電流測定を基としたインディシャル、インピーダンス算定法の考察

2.5.1 測定及算定の原理

直描測定状態のオシログラフに於て、其の標準抵抗 R_s を第2.5.1図の如く、常に未知インピーダンス g_x と直列にする如く挿入し、二素子オシログラフの偏位板を R_s 及 g_x に並列に接続する如く変形すれば、二回の測定を要せず一回の測定を以て、一撃にオシログラフと殆ど同一の直描測定結果が得られる事に於ける。この様を測定法は、電圧、電流法と名付く可きものであつて、標準抵抗 R_s とオシログラフの読みから電流を知り、未知インピーダンスの電位降下を相除する形式で、その値を求める事が出来る。只本法が行はれるのは低インピーダンス、例へば接地インピーダンスの如き測定に限られるのであつて、衝撃電圧発生装置 I.G. の対地漂遊静電容量及電源の背後定数が標準抵抗と並列に入るため高インピーダンスの測定には適しない。

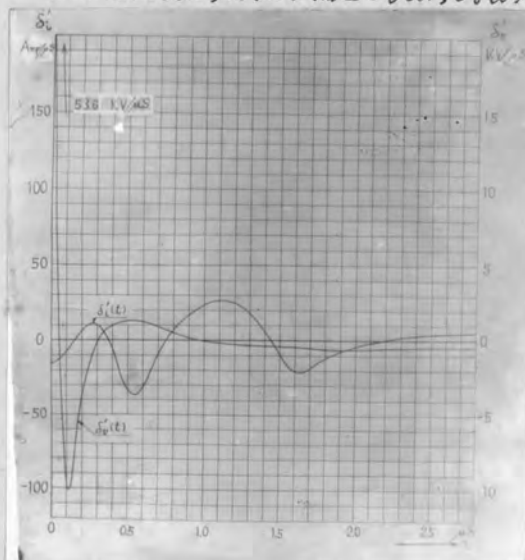
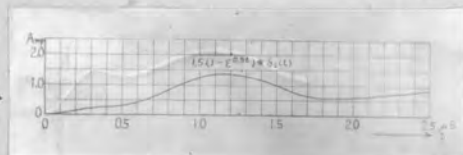
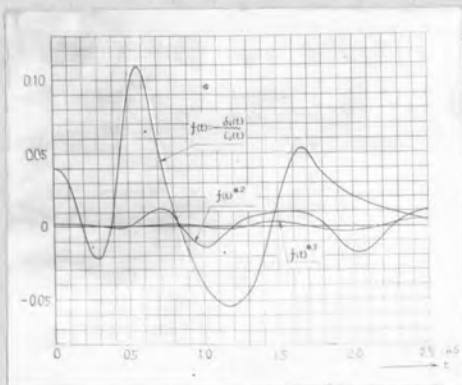
I.G. が接地式のものでは勿論使用不可能となる。前述の如き変形接続はオシログラフの偏位板の電位誤差¹⁾を最小に保持する非理想的のものである。

1) 陰極線オシログラフの偏位板平均電位が陰極線に作用し加速或は減速作用を營みこの為生起する偏向誤差である。例へば F. Williams: W. Eng. 17. 189. 61 (1940)⁽⁹⁾ 只野, 電試研 444号⁽¹⁰⁾ 等参照



第2.5.2図

電圧及電流波形の原形 $v(t)$, $i(t)$,
 中核函数 $v_o(t)$, $i_o(t)$ 及偏差 $\delta v(t)$, $\delta i(t)$

第2.5.3図 $\delta v(t)$ 及 $\delta i(t)$ 第2.5.4図 $1.5(1 - e^{-0.5t}) * \delta i(t)$ 

第2.5.5図

$\delta i(t)$ 及 $i_o(t)$ 及其の二相乗, 三相乗, ……

るが、これ以外に広義に電圧電流法と名付くべき測定法は多数存在するが夫々測定誤差の見地から一長一短がある。

今諸法の一により電圧及電流のオシログラムが正確に與へられたものとし、如何なる方法により、そのインピーダンスを見出すかを考察することにする。之に関しては既に昭和12年林重憲博士により與へられた啓蒙的業績¹⁾があり未知インピーダンスは測定せられた電圧の演算子函数 $V(p)$ と電流の演算子函数 $I(p)$ に依り、次の如く算定されなければならぬと指摘されてゐる。

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{V(p)}{I(p)} \frac{e^{pt}}{p} dp \quad \text{----- (2.5.1)}$$

然るに、夫以前或は現在に於ても尚屢々誤った観念から、輕率に未知インピーダンスを求めるに當り電圧波 $v(t)$ と電流波 $i(t)$ の商を取り

$$Z(t) = \frac{v(t)}{i(t)} \quad \text{----- (2.5.2)}$$

として算出する一部の人がある。而して(2.5.1)に従ふ形式の検討すら殆ど見受けないのであるが、之を更に發展して、若し現象演算法を適用するならば、インディシャル・インピーダンス $Z(t)$ は $v(t)$ 及 $i(t)$ のオシログラムを以て、

$$Z(t) = \frac{v(t)}{i(t)} \quad \text{----- (2.5.3)}$$

とすれば之を求める事が出来るのである。(2.5.2) は明白に誤りであり、(2.5.1) はインピーダンスの概数を決定するに便である。そして(2.5.3) は $v(t)$ 及 $i(t)$ が実験式を以て正確に表し難い場合には $Z(t)$ を算出する殆ど唯一の方法である。従つて電圧電流に依るインピーダンス測定法は(2.5.3)を当然その算定原理とすべきである。

2.5.2 算定例

(2.5.3)の様を相除式は今迄に述べた、電圧比、電流比の算定式或はアドミッタンスの誘導法と數式的に同一形式である。故に以下の如き一例題を計算し、全部のものを一括する代表的例題としたい。

電圧電流波形のオシログラムとして嘗て林重憲博士が取扱はれた處の接地インピーダンスの測定資料²⁾を用ふる。第2.5.2図の実線波形 $v(t)$

¹⁾ 林: 埋設地線の接地インピーダンスの決定に關する注意、電學誌、57・589・686 (昭12・8) (8)

²⁾ 全上文献(8)参照

及 $i(t)$ は実験に依り得られた電圧及電流のオシログラムである。この波形を精密に実験式で與へる事は困難であるから、其の中核函数として、

$$\begin{aligned} v_0(t) &= 11(\varepsilon^{-t} - 1.5\varepsilon^{-10t}) + 5.5 \quad \text{KV} \\ i_0(t) &= 200(\varepsilon^{-t} - 1.5\varepsilon^{-2t}) + 100 \quad \text{A} \quad (t: \text{MS}) \end{aligned} \quad \text{----- (2.5.4)}$$

とするものを採ぶ。(この数値及(2.5.7)式の結果は總て林博士に依り與へられたものである) 其の波形は第2.5.2図実線に示す如くである。明かに現象函数 $v(t)$, $i(t)$ との間に差異を生ずる。夫々の差函数を $\delta v(t)$ 及 $\delta i(t)$ として、其の形狀を求めれば同図下に示した如くなる。(2.5.3)の現象演算を実施する爲(2.5.4)を夫々演算子函数化すれば、

$$\begin{aligned} V_0(p) &= 11\left(\frac{p}{p+1} - \frac{1.5p}{p+10}\right) + 5.5 \quad \text{KV} \\ I_0(p) &= 200\left(\frac{p}{p+1} - \frac{1.5p}{p+2}\right) + 100 \quad \text{A} \end{aligned} \quad \text{----- (2.5.5)}$$

を得る。此處で現象演算法とは全く無関係となるが、参考の爲に(2.5.5)なる $V_0(p)$, $I_0(p)$ 相互間に於て求めらるインピーダンス函数の値を示せば

$$Z_0(p) = \frac{V_0(p)}{I_0(p)} = 1000 \left(\frac{15.4p^2 + 36.3p + 11}{40p^2 + 420p + 200} \right) \Omega \quad \text{----- (2.5.6)}$$

となる。其の時間函数は

$$z_0(t) = \{ 385 - 17.4(1 - \varepsilon^{-0.5t}) - 313(1 - \varepsilon^{-10t}) \} H(t) \Omega \quad \text{----- (2.5.7)}$$

となる。この形狀は後に現象演算の結果と比較して、オ2.5.6図に示す事とする。(2.5.7)式は求めるインディシャル・インピーダンスを正確に示してゐるのは明かであるから、次に現象演算を行ふ事とする。

現象演算で與へられるインディシャル・インピーダンス $z_x(t)$ は、

$$z_x(t) = \frac{v_0(t) + \delta v(t)}{i_0(t) + \delta i(t)} = \frac{v_0(t)}{i_0(t)} * \left[1 + \frac{\delta v(t)}{v_0(t)} \right] * \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left(\frac{\delta i(t)}{i_0(t)} \right)^{* \nu} \right] H(t) \quad \text{----- (2.5.8)}$$

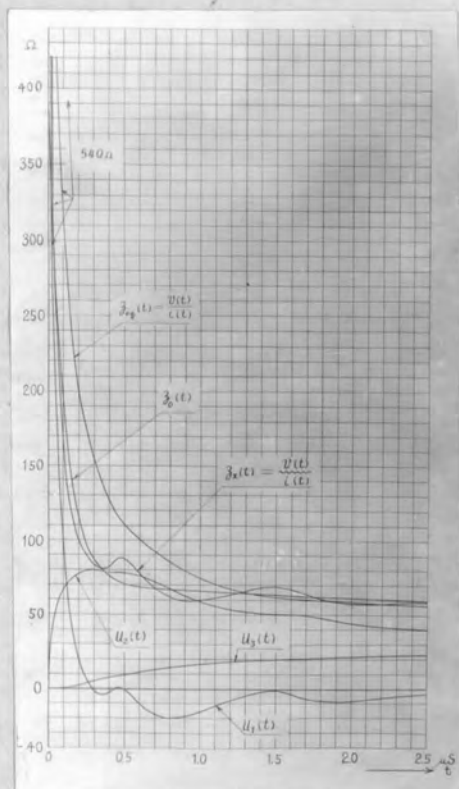
である。計算の手数を省略する爲には $v(t)$ を分解せずして、

$$z_x(t) = \frac{1}{i_0(t)} * v(t) * \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left(\frac{\delta i(t)}{i_0(t)} \right)^{* \nu} \right] \cdot H(t) \quad \text{----- (2.5.9)}$$

とするがよい。後者に依り $z_x(t)$ を算出する場合として其の誘導順序を記せば次の如くなる。

$$\frac{1}{I(p)} = \frac{1}{400} \left(p + 2.5 + 1.5 \frac{0.5}{p + 0.5} \right) \quad 1/A \quad \text{----- (2.5.10)}$$

$$\therefore \frac{H(t)}{i_0(t)} = \frac{1}{400} [t^{*1+2.5+1.5} (1 - \varepsilon^{-0.5t})] H(t) \quad \text{----- (2.5.11)}$$



第 2.3.6 圖

$v(t) \sim i(t)$, $v(t)/i(t)$ 及
中核函数より求めたインピーダンス
 $Z_0(t)$ との比較

(2.5.11) 括弧内の第一項の相乗は微分を意味する。

第2.5.3図は $d\delta_i(t)/dt$ 及 $d\delta_v(t)/dt$ の値 第2.5.4図は $1.5\delta_i(t) * (1 - e^{-at}) H(t)$ の値 第2.5.5図は $\delta_i(t) \sim i_0(t)$ の値、其の二相乗、三相乗の値を示す。

第2.5.6図は三部分に分れる

$$v_r(t) = v(t) * \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left(\frac{\delta_i(t)}{i_0(t)} \right)^{* \nu} \right] H(t) \quad \checkmark \dots\dots (2.5.12)$$

として、

$$u_1(t) = \frac{1}{400} v_r'(t) \quad \Omega$$

$$u_2(t) = \frac{1}{16} v_r(t) \quad \Omega \quad (2.5.13)$$

$$u_3(t) = \frac{3}{800} (1 - e^{-0.5t}) * v_r(t) \quad \Omega$$

の値を示す。之等の総和は求める $z_x(t)$ とする。其の形状は同時に記入した。本計算を施行した際の最小の時間軸分割は $0.0125 \mu s$ であつて、特に初期値附近の計算精度は精密に吟味した。

興味ある比較として 第2.5.6図に2つの曲線を挿入した。本図中の $z_{eg}(t)$ とする曲線は $z_{eg}(t) = v(t)/i(t)$ を示すものであつて、 $v(t)$ と $i(t)$ の商を求めて挿入したものである。其の初期値は $t=0$ 附近の $v(t)$ と $i(t)$ の微係数から決定すれば 540Ω とする。又 $t=2.5 \mu s$ 附近の準定常状態では 156Ω の値をとる。他方 $z_0(t)$ は前述(2.5.4) 及 (2.5.7) より求めたもので初期値は 385Ω 、終局値は $t=2.5 \mu s$ に於て 160Ω の値を取り、 $z_{eg}(t)$ と $t=1.3 \mu s$ 附近で交叉する。

さて、現象演算で求めた $z_x(t)$ は、其の初期値は正確に 540Ω であつて、 $z_{eg}(t)$ の初期値と全く一致する。而して波形は振動性を帯び $z_0(t)$ に沿つて、低下し $t=2.5 \mu s$ 附近では尚振動性を保つが、其の振動の中心曲線は再び $z_{eg}(t)$ に移行する。斯様を事実上、この現象演算が如何に正確なものであるかを物語ると同時に $z_{eg}(t)$ の初期値は、 $z_x(t)$ の夫と完全に一致すると共に、終局値も一致すると云ふ結論を立證するものである。斯くの如くして、第2.5.6図の三曲線を見るに前に述べた如く、 $z_{eg}(t)$ はインディシャル・インピーダンスとしては誤りであるが、その初期値と終局値は真正の値に近く、 $z_0(t)$ はその簡潔な補正であるが、函数的傾向として、真正値の概要を示して居り、 $z_x(t)$ は最も計算操作が複雑な補正であるが、最も真正に近いものであると判定する事が出来る。

2.6 結 言

α -京大法は、現象演算法を適用して、初めて完全なものをつくったと云ふべきである。何と云へば、最善の手法として何人も異論の無い等の直描測定法を理想的な完全さで施行するのは、事実上不可能であつて、或る程度之に接近した状態で行へるを以て可とせねばならぬから、何時でも之を完全なものに補正出来るといふ一定の基礎を有しなくてはならぬ。而して演算子函数單獨に頼る補正法は、求めるインピーダンスの微細構造を完全に表現する丁が出来まい。之に反し波形自体が演算対象である現象演算法は、当然 α -京大法に取つて随分適したものである。

本章では、頭初現象演算法の記法を紹介し、該法の要約たらしめ、次に α -京大法への適用法として、相乗冪級数への展開に依る處理法を述べ、ケーブル及変圧器等の非直描状態下のオシログラムに対し、実際に補正計算を施行した例を紹介した。この補正計算の中、相乗計算は図式法に依り施行したのであるが、測定波が複雑となるにつれて、計算の手数を増し、一個の曲線を描くのに多大の忍耐と労力及日時を要した。併し乍ら、本法以外に図形的にインディシャル、インピーダンスを表示する手法が無いのであるから、又その基範となるものと信ぜられるので、丹念に計算を進行し、各時刻の計算値が一つの連続曲線に必ず集る様計算誤差の吟味を行つた。

次に拡張論を行ひ、インディシャル、インピーダンスを基として、回路系のインディシャル、アドミッタンス、インディシャル電圧比、電流比が誘導可能である事を示し、且つその方法を與へた。之等は現象演算法が回路系の凡ゆる問題を解くのに有力である事を示すものである。而して、相除演算の最も典型的な一例として、電圧、電流測定法に依りインディシャルインピーダンスを決定する計算を組上じ、現象演算に依り、如何に精密に之が決定されるか其の实例を示した。

尚附録Iに現象演算法を構造する割期的な基本法則即ち、相乗冪級数の収斂條件が、其の初期値の冪級数の収斂條件で與へられる丁を指摘した。

第 III 章 實際的な問題に対する應用

3.1 緒 言

インディミナル・インピーダンスの測定値を利用し、各種電気回路過渡現象の計算を行ふ方法は或程度テブナン定理の適用法に合致して居ると見てよい。即ち回路を分割せしめ各部に対し、測定を実施し、然る後接合状態の現象を論ずる形式を取ることが故である。其の論ずる形式は測定したインピーダンスを、現象函数で表しても其の中核函数で表しても何れでもよい。併し乍ら、多くの場合、諸機器のインディミナル・インピーダンスは、之を測定する事自体が一つの問題とするものであつて、之に依り其の機器の内部的機構を打診することになり、設計若しくは製作の資料にまづけることが多い。

本章では、特に直描測定が行へる様に才=京大法の機構を整へて、各種電気機器及回路に対し求めた實際的な測定資料を多数紹介すると共に、尚之に振つて、検討された、若干の応用事項に關し、述べる事とする。其の範圍は、送電線、変圧器、電車電動機、接地インピーダンスの四項目であつて、何れも野外実験若しくは之に準ずるものとして多数の援助員と共に大規模に施行されたものである。

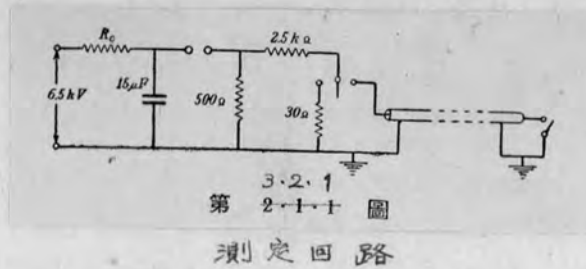
3.2 明石洲本間、架空-海底ケーブル混成線路の過渡的振性及回路電圧の計算

3.2.1 実験方針及測定項目

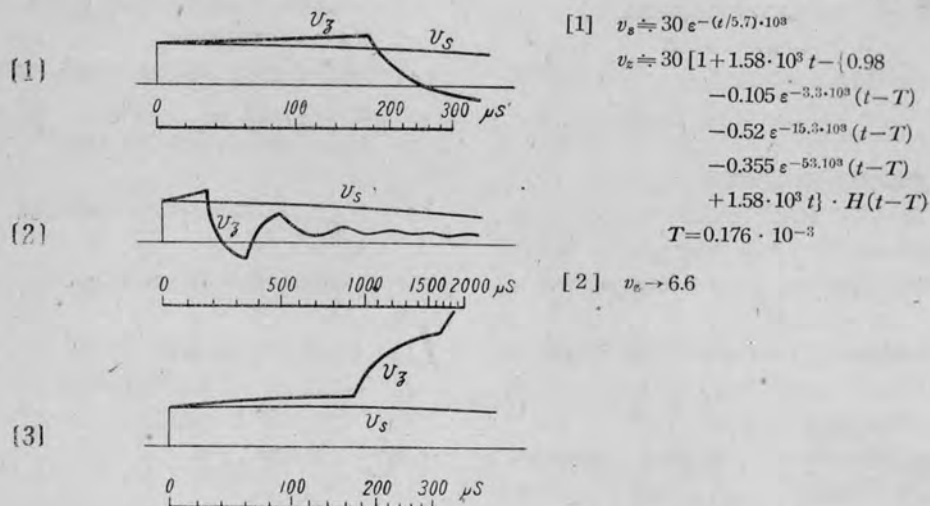
本送電線は兵庫縣明石変電所を起點として、明石海峡に臨む沿岸林崎迄 1.1 Km を架空二回線以後新旧各一回線の海底ケーブル線路に分れ、海峡を横断して、新ケーブルは巨長 17.4 Km を以て対岸淡路島の野島へ出で、以後架空 25.2 Km で志筑を経て洲本に至る。旧ケーブルは巨長 14.1 Km にて大川に出で、架空 2.7 Km にて野島に達し、新旧線と合し、以後巨長 25.2 Km にて志筑を経て洲本に達する。志筑、洲本間の距離は 10.5 Km である。

この送電線の綜合特性検討の基礎とするものは、各線路の波動インピーダンス及影像電圧比の二者であるが、測定地桌が限定されてゐる爲、幸うじて旧ケーブル線路でこの測定が可能となつたのみで、其の理想を満す事が出来ず、結局明石変電所側から見た線路の綜合インピーダンスを測定するに主力を注ぐ結果となつた。

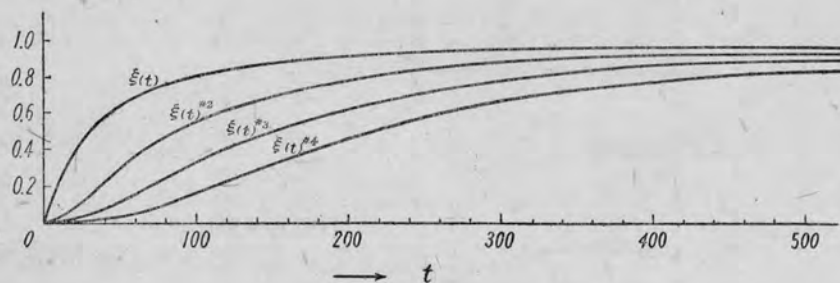
送電線は平行二回線であり且つ三相三線式である。多線系としての線路定数は、六線式として扱へば 18 個あり、三線式として扱つても 6 個あり、夫々を決定する事は煩に耐へないので、全線は平衡した三線式であると假



測定回路



3.2.2
第 2.1.2 圖 舊ケーブルの終端短絡及び開放時の入端過渡インピーダンス



3.2.3
第 2.3.1 圖

ケーブルの往復長影像電圧比 及其の二相束, 三相束,

定して二回の測定、例へば一線対二線一括接地(A:B,C,E)両測定及び、三線一括測定(A,B,C:E)の二種類で線間及対地定数を決定し、尚一線単独(A:E)の資料を追加して参考とした。ケーブル部分は構造がS.L型であるから、之は一回の測定で済む事となる。以上の見地より下記諸項目について測定を行つた。

[A] ケーブル単独のインディシヤル・インピーダンスの測定
(旧ケーブル線のみについて施行)

i 他端開放 ii 他端短絡

[B] 全送電線の総合インディシヤル・インピーダンスの測定
(新旧の両ケーブル回線に対し各自施行)

i 志筑及び洲本両変電所設置変圧器を切離し、洲本にて三線一括接地、

ii 同上に於て洲本の接地を解き全線開放

iii 洲本側変圧器のみ接続、その二次側開放

iv 同上に於て二次側短絡

v 志筑及洲本両変電所変圧器接続二次側短絡

vi 志筑及洲本両変電所変圧器を切離し、洲本にてA線のみ接地、

[C] 明る変電所設置変圧器のインディシヤル・インピーダンスの測定

i 結合他線輪短絡

ii 同上 500Ω 抵抗にて橋絡

iii 同上 1500Ω 抵抗にて橋絡

iv 同上開放

3.2.2 ケーブル部分の測定

其の測定回路は才3.2.1図の如く構成した。才=京大凌として^(本図終り)略完全を直描状態にある。得たオシログラムは才3.2.2図の如くであつて、同図[1]は大川に於て終端短絡した端子インピーダンス $Z_s(t)$ を與へるもので、標準抵抗 30Ω に対する較正波 v_s は球形歪を矯正すれば殆ど矩形波である。このオシログラムよりケーブル波動インピーダンス $w(t)$ は略直線状に上昇する事が判りその実験式は

$$w(t) \doteq 30[1 + 1.58 \cdot 10^3 t] \Omega \text{ ----- (3.2.1)}$$

としてよい。才3.2.2図[2]は長時間域のオシログラムで、端子インピーダンスは振動性を帶び、約 2ms で定常値に落付く。この定常部分は、ケーブルの直流抵抗を與へるものである。才3.2.2図[3]は大川に於て終端開放した場合の端子インピーダンス $Z_f(t)$ を與へるオシログラムである。

映像電圧比は(2.4.15)式に依り算出可きであるが、その値として線路往復長のものを取れば計算が遙かに樂であり、且後の応用計算も施し易い。故に今斯かる往復長映像電圧比を $\xi(t)$ とすれば

$$\xi(t) = \frac{z_f(t) - w(t)}{z_f(t) + w(t)} \quad \text{----- (3.2.2)}$$

或は

$$\xi(t) = \frac{w(t) - z_s(t)}{w(t) + z_s(t)} \quad \text{----- (3.2.2)'}$$

である。オシログラフを視察し、兩者何れの算式に據つても、同一の結果に到達することが察知される。即ちケーブルは一樣分布定数回路をなし、且大川に於ける終端短絡は抵抗をもたない完全なものであることが判る。

$w(t)$ の實驗式は(3.2.1)で略完全であるから、級数展開を利用し、(3.2.2)式を次の如く展開する。

$$\begin{aligned} \xi(t) \doteq & \frac{1}{2} \frac{1}{30} [z_f(t) - w(t) + 1.58 \cdot 10^3 \int_0^t \{z_f(\tau) - w(\tau)\} d\tau \\ & + (1.58 \cdot 10^3)^2 \int_0^t \int_0^\tau \{z_f(\tau) - w(\tau)\} d\tau^2 + \text{-----} \\ & (0.176 \cdot 10^{-3} \leq t \leq 0.353 \cdot 10^{-3}) \text{----- (3.2.3)} \end{aligned}$$

上式で殆ど $\xi(t)$ の形態が決るが、尚 $t > 0.353 \cdot 10^{-3}$ に於ては $0 \leq t \leq 0.353 \cdot 10^{-3}$ に於て算出された $\xi(t)$ 及 $t > 0.353 \cdot 10^{-3}$ に於て新しく算出されて来る $\xi(t)$ を利用し、之を求値値と區別する爲 $\xi_r(t)$ と書いて次の如き交覆方程式を成立せしめる。

$$\begin{aligned} \xi(t) \doteq & \frac{1}{2} \frac{1}{30} [v_r(t) + 1.58 \cdot 10^3 \int_0^t v_r(\tau) d\tau \\ & + (1.58 \cdot 10^3)^2 \int_0^t \int_0^\tau v_r(\tau) d\tau^2 + \text{-----} \text{----- (3.2.4)} \end{aligned}$$

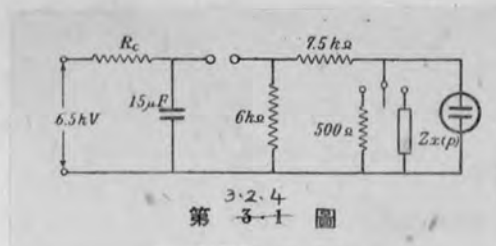
但し、

$$v_r(t) = z_f(t) - w(t) - 2w(t) * \{ \xi_r(t)^{*2} + \xi_r(t)^{*3} + \text{-----} \} \quad \text{----- (3.2.4)'}$$

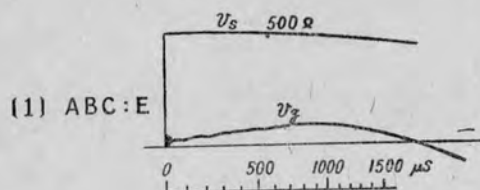
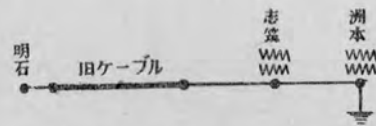
$\xi(t)$ は $H(t - 0.176 \cdot 10^{-3})$ を含むから、交覆方程式の時間領域は円満に適合され、不都合を生じない。才3.2.3図は斯くして求めた $\xi(t)$ の形状と、其の2相乗、3相乗-----を変時要素 $H(t - t_1)$ を脱略して指示してある。

3.2.3 送電線部分の測定

前項2.1節に記した項目に従ふ全オシログラムを第3.2.5図より第3.2.15図に亘り展示する。オシログラム右辺に記した數式は、オシログラムの波

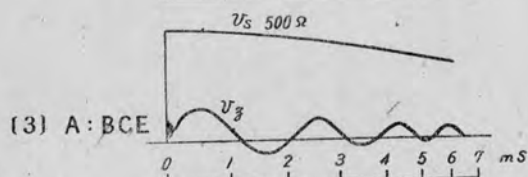
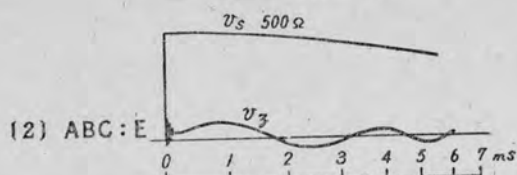


測定回路



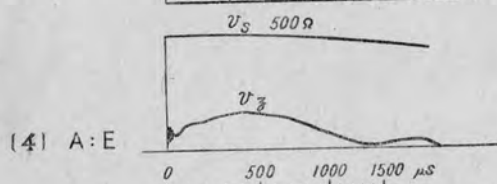
$$[1] \quad v_s \doteq 500 \varepsilon^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$[2] \quad v_z \doteq 75 \varepsilon^{-(t/47)} \sin 2\pi \cdot 350 t$$



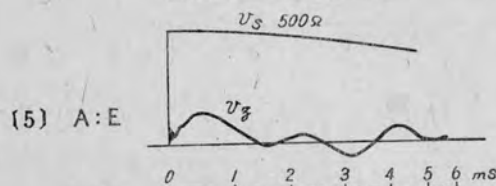
$$[3] \quad v_s \doteq 500 \varepsilon^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq 170 \varepsilon^{-(t/4) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 530 t$$



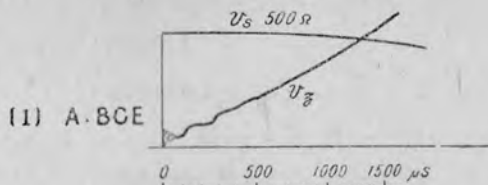
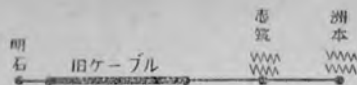
$$[4] \quad v_s \doteq 500 \varepsilon^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$[5] \quad v_z \doteq 130 \varepsilon^{-(t/4) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 530 t \\ + 53 \varepsilon^{-(t/4.8)} \sin 2\pi \cdot 350 t$$



3.2.5

第3-1-1 圖 舊ケーブル線 洲本側に於て三線接地せる送電線單獨の過渡インピーダンス

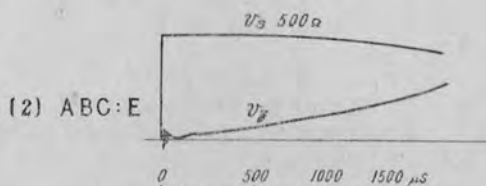


$$[1] v_s \approx 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \approx \frac{t}{2.7} \cdot 10^{-6}$$

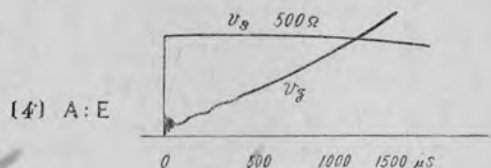
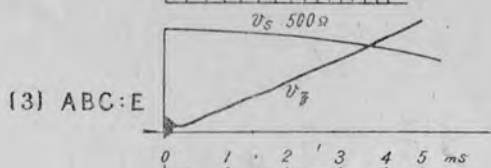
3-2.6

第3-1-2圖(a) 舊ケーブル線 全線開放状態の過渡インピーダンス



$$[2] v_s \approx 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$[3] v_z \approx \frac{t}{7.9} \cdot 10^{-6}$$

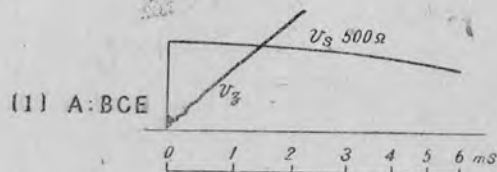
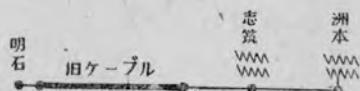


$$[4] v_s \approx 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \approx \frac{t}{2.6} \cdot 10^{-6}$$

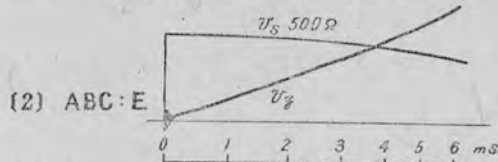
3-2.6

第3-1-2圖(b) 舊ケーブル線 全線開放状態の過渡インピーダンス



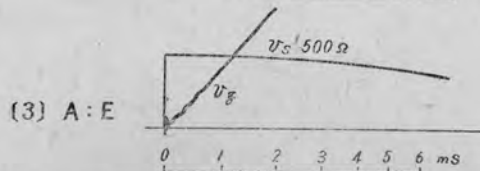
$$[1] v_s \approx 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \approx \frac{t}{2.9} \cdot 10^{-6}$$



$$[2] v_s \approx 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \approx \frac{t}{7.8} \cdot 10^{-6}$$

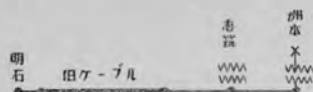


$$[3] v_s \approx 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \approx \frac{t}{2.6} \cdot 10^{-6}$$

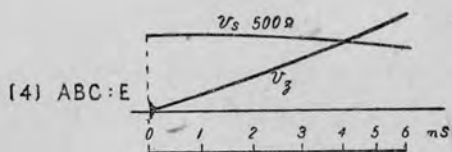
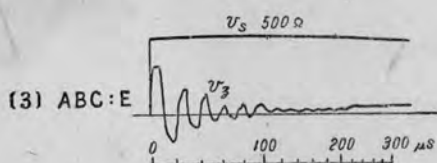
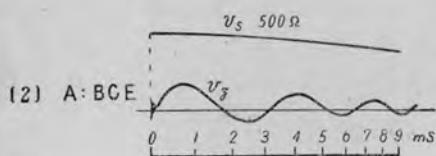
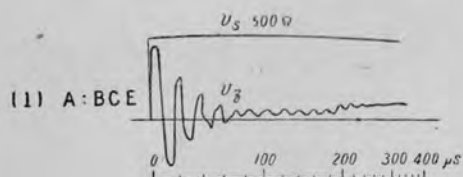
3-2.7

第3-1-3圖 舊ケーブル線 洲本側變壓器 (二次開放) 接合状態の過渡インピーダンス

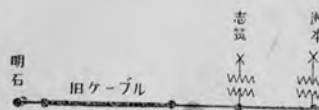


3.2.8

第3-1-4圖 舊ケーブル線

洲本側變壓器（二次短絡）接合状態の
過渡インピーダンス

- [1] $v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$
 $v_z \doteq 1.19 \cdot 450 e^{-(t/25) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 59 \cdot 10^3 t$
 $+ 30(1 - e^{-(t/40) \cdot 10^3})$
- [2] $v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$
 $v_z \doteq 160 e^{-(t/5.6) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 330 t$
- [3] $v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$
 $v_z \doteq 1.19 \cdot 290 e^{-(t/40) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 59 \cdot 10^3 t$
 $+ 10(1 - e^{-(t/40) \cdot 10^3})$
- [4] $v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$
 $v_z \doteq \frac{t}{8.6} \cdot 10^{-6}$

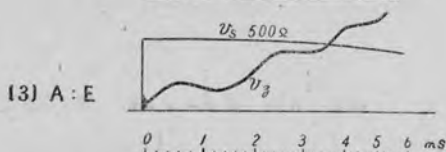
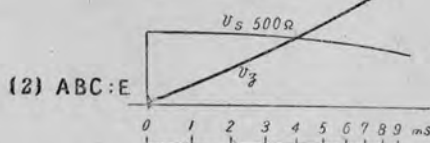
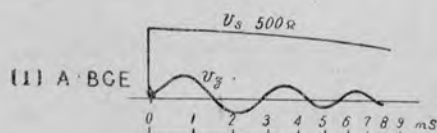


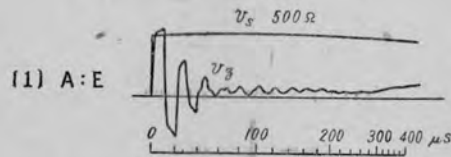
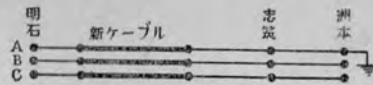
3.2.9

第3-1-5圖 舊ケーブル線

全線變壓器（二次短絡）接合状態の
過渡インピーダンス

- [1] $v_s \doteq 500 e^{-(t/16) \cdot 10^3}$
 $v_z \doteq 160 e^{-(t/5.6) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 360 t$
- [2] $v_s \doteq 500 e^{-(t/16) \cdot 10^3}$
 $v_z \doteq \frac{t}{8.1} \cdot 10^{-6}$
- [3] $v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$
 $v_z \doteq 130 e^{-(t/3.2) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 570 t + \frac{t}{7} 10^{-6}$

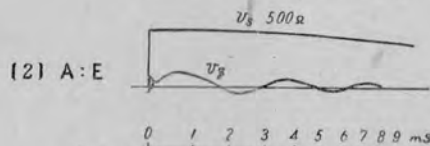




$$[1] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq 1.19 \cdot 530 - (t/25) \cdot 10^3 \sin 2\pi \cdot 59 \cdot 10^3 t$$

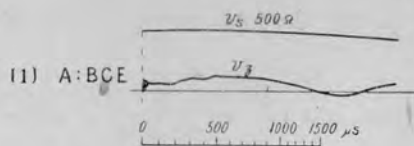
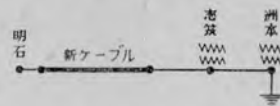
$$+ 40(1 - e^{-(t/50) \cdot 10^3})$$



$$[2] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

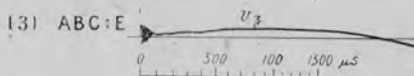
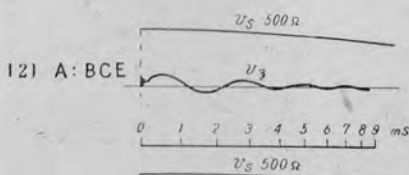
$$v_z \doteq 145 e^{-(t/3) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 330 t$$

3-2-10 第3-2-10圖 新ケーブル線 洲本側にて一線接地せる送電線單獨の過渡インピーダンス



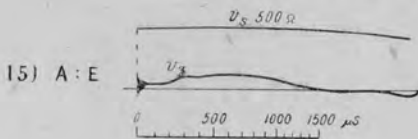
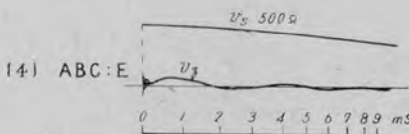
$$[1] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$[2] \quad v_z \doteq 180 e^{-(t/4.8) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 480 t$$



$$[3] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/15) \cdot 10^3}$$

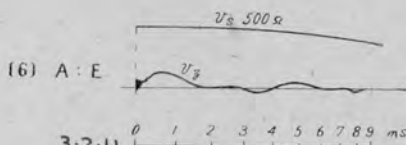
$$[4] \quad v_z \doteq 69 e^{-(t/40) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 320 t$$



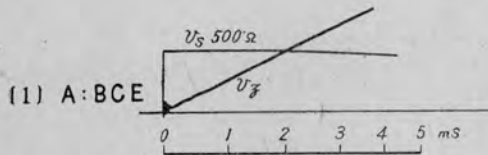
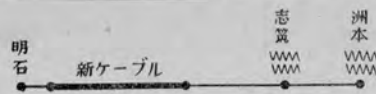
$$[5] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$[6] \quad v_z \doteq 55 e^{-(t/4.0) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 320 t$$

$$+ 160 e^{-(t/4.8) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 480 t$$

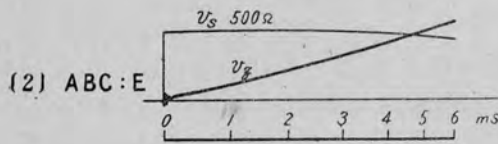


3-2-11 第3-2-11圖 新ケーブル線 洲本側にて三線接地時の送電線單獨の過渡インピーダンス



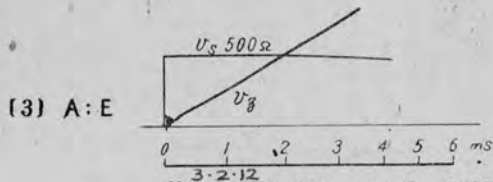
$$[1] \quad v_g \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq \frac{t}{4.3} \cdot 10^{-6}$$



$$[2] \quad v_g \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

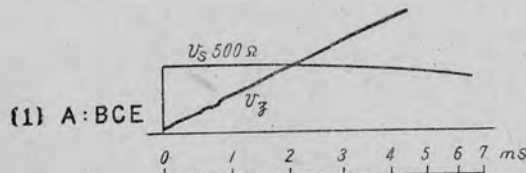
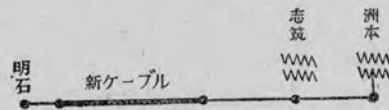
$$v_z \doteq \frac{t}{11.6} \cdot 10^{-6}$$



$$[3] \quad v_g \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

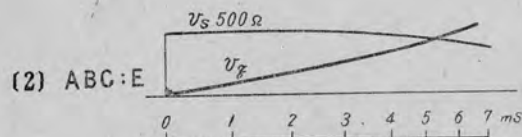
$$v_z \doteq \frac{t}{4.0} \cdot 10^{-6}$$

第3-2-3圖 新ケーブル線 全線開放状態の過渡インピーダンス



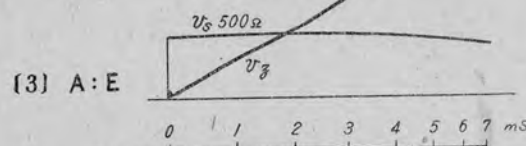
$$[1] \quad v_g \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq \frac{t}{4.0} \cdot 10^{-6}$$



$$[2] \quad v_g \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

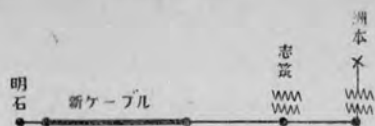
$$v_z \doteq \frac{t}{11.9} \cdot 10^{-6}$$



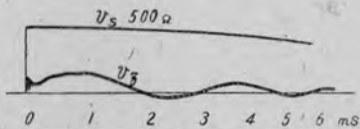
$$[3] \quad v_g \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq \frac{t}{3.6} \cdot 10^{-6}$$

第3-2-4圖 新ケーブル線 洲本側變壓器 (二次開放) 接合状態の過渡インピーダンス



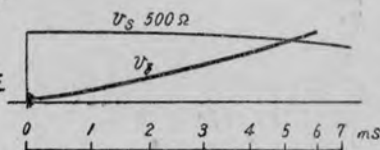
(1) A:BC



$$[1] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq 180 e^{-(t/5.0) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 330 t$$

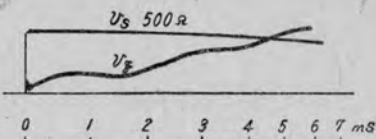
(2) ABC:E



$$[2] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq \frac{t}{11.5} \cdot 10^{-6}$$

(3) A:E

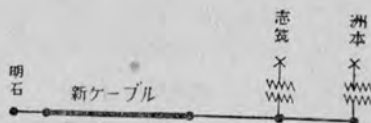


$$[3] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

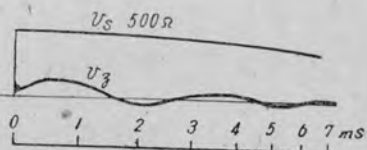
$$v_z \doteq \frac{t}{9.8} \cdot 10^{-6} + 96 e^{-(t/3) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 460 t$$

3.2.14

第3-2-5圖 新ケーブル線 洲本側變壓器 (二次短絡) 接合状態の過渡インピーダンス



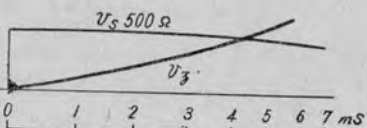
(1) A:BCE



$$[1] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq 180 e^{-(t/6.6) \cdot 10^3} \sin 340 t$$

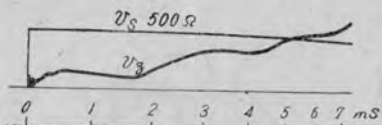
(2) ABC:E



$$[2] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq \frac{t}{9.3} \cdot 10^{-6}$$

(3) A:E

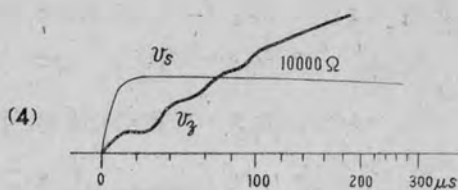
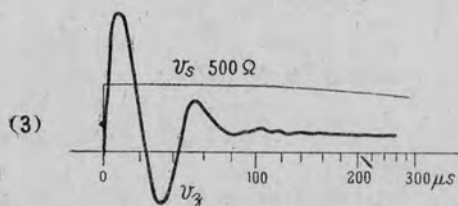
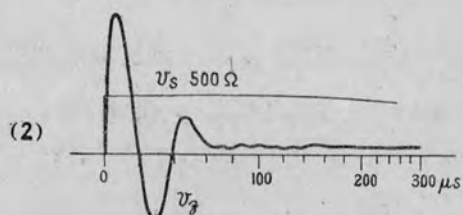
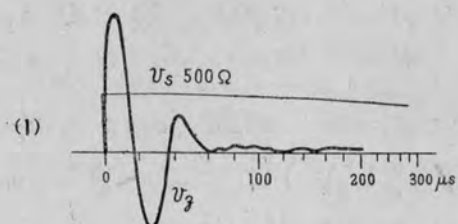
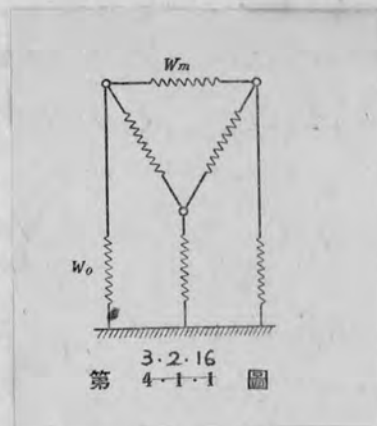


$$[3] \quad v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq 80 e^{-(t/8.8) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 430 t + \frac{t}{11.5} \cdot 10^{-6}$$

3.2.15

第3-2-6圖 新ケーブル線 全線變壓器 (二次短絡) 接合状態の過渡インピーダンス



3.2.17

第 5-1 圖 明石側設置變壓器一箇の二次側
過渡インピーダンス

[1] 一次側短絡

$$v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq 1660 e^{-(t/29) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 29 \cdot 10^3 t$$

[2] 一次側抵抗 500 Ω

$$v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq 1580 e^{-(t/31) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 26 \cdot 10^3 t + 45(1 + e^{-(t/6) \cdot 10^3})$$

[3] 一次側抵抗 1500 Ω

$$v_s \doteq 500 e^{-(t/17) \cdot 10^3}$$

$$v_z \doteq 1230 e^{-(t/35) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 23 \cdot 10^3 t + 120(1 - e^{-(t/7) \cdot 10^3})$$

[4] 一次側開放

$$v_s \doteq 10000(e^{-(t/17) \cdot 10^3} - e^{-t/9 \cdot 10^6})$$

$$v_z \doteq 3400 e^{-(t/52) \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 34 \cdot 10^3 t$$

$$+ \frac{t}{0.0074} \cdot 10^{-6}$$

形の概略的な実験式を與へるもので、この内被測インピーダンスの ν_3 に対しては、標準抵抗に於ける波形の僅かなばり低下の影響を既に補正済みのものである。時間域は約400 μ s 位と約9 ms 位を二種類を交互に使用し、同一資料に於て両者の測定を行つたところがある。測定回路はオ3.2.4図に示す。

短時間域の測定値より、林崎明石間の1.1 km 架空送電線の波動インピーダンスの初期値を求めれば、

- (a) 一線対他二線間 450 Ω
- (b) 三線一括大地間 290 Ω
- (c) 独立一線対地間 530 Ω

である。故に之等より、オ3.2.16 図の如き等価回路を作ることが出来る。長時間域の総合定数は、容量的性質を示す場合と、単一指数函数状減衰振動を示す場合と、その振動が二種類重畳する場合の三つの場合に分れる。之等の数値はオシログラムに添記した處に依り明瞭である。特徴として、志筑洲本に於ける変圧器の離合状況が明石側のインピーダンスに大きな影響を及ぼすことが認められる。即ち変圧器の二次開放時のインピーダンスは無限大、二次短絡時のものは零に近い。其の他三線一括の振動周期と、一線対二線間の夫とが相違する。三線一括時の振動周期は波動インピーダンス10 Ω 等価巨長27.5 km、及、波動インピーダンス290 Ω 巨長27.9 kmの縦続線路に於て理論的に計算されるもの¹⁾に等しいことが指摘される。

3.2.4 変圧器部分の測定

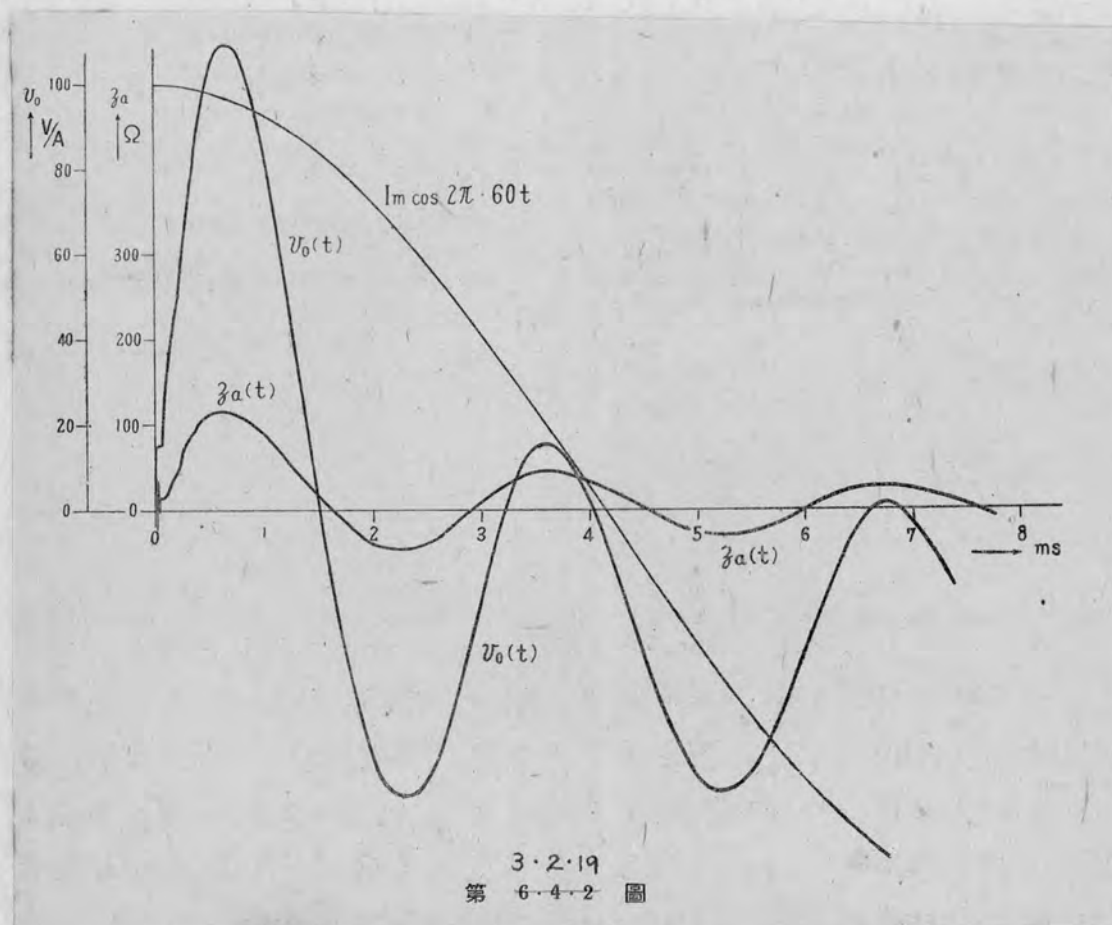
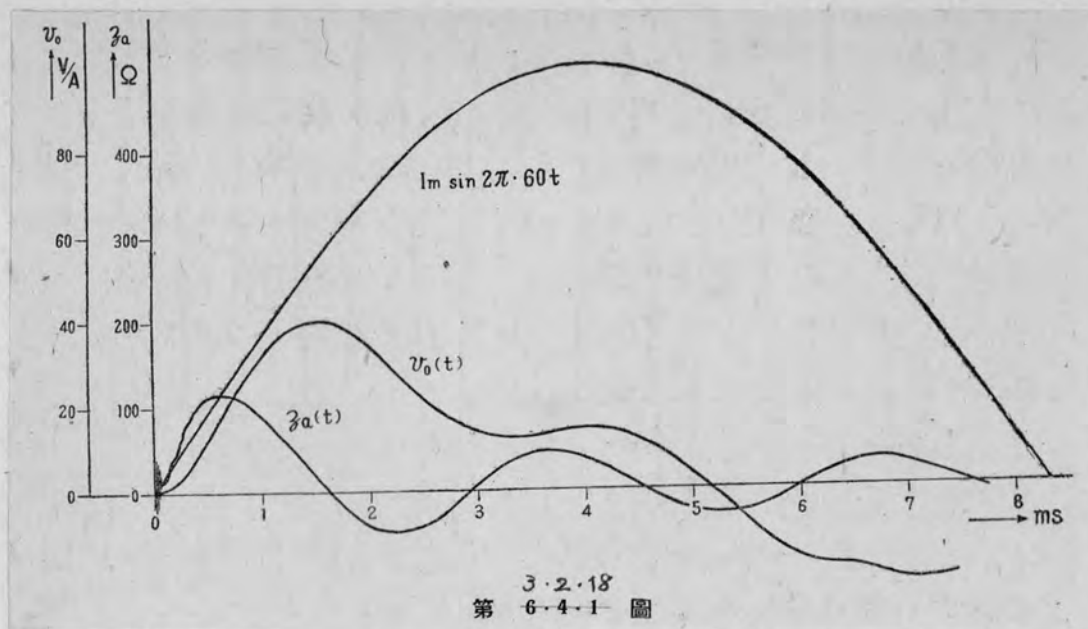
明石変電所設置変圧器に就て、混成線路側から見たインピーダンスを、結合他線路(一次側)の抵抗を0, 500 及 1500 Ω 無限大の四種類に変更して測定を行つた。このオシログラムを第3.2.17 図に示す。二次側開放の場合は標準抵抗 R_0 を10 k Ω R_m を150 k Ω に変更した。以上の結果から、各インピーダンスに近似した実験式を造ると、オシログラムに記入した如きものとなる。符に矢付くものは、波動の減衰性が著しいこと、其のインピーダンスが低い事二者である。尚一次側に於ける抵抗の影響が左程大でなく、500 Ω の程度の増減は殆ど短絡に等しいこと、及其の値が一次側に準定的に出現する事等が指摘される。

3.2.5 閉路電圧の計算

i 異相回路として取扱つた場合

a. 零電流遮断

¹⁾ 電評 36.13 (昭和23年6月)⁽¹¹⁾ 参照



送電中の開閉器の接觸が交番電流零の瞬時に切斷されるものと考へ、その時發生する線路側電圧を零電流遮斷に於ける開路電圧と稱する。その電圧は、遮斷前の電流と値同じく、位相反対の強制電流を流通した時發生する電圧を線路に遮斷前存在した電圧と相加して得られる。實際問題として後者の影響は切離すことが出来るから、以下前者の影響だけ問題とする。遮斷回路として單相の場合を扱い、一線独立の測定インピーダンスが3.2.15図[3]を使用する。このインピーダンスの図形は、オシログラムより、又實驗式は下記の如き形式である。

$$Z_a(t) = A e^{-\rho t} \sin \Omega t \cdot H(t) \quad \text{-----} (3.2.6)$$

次に遮斷前の電流を

$$i(t) = -I_m \sin \omega_0 t \quad \text{-----} (3.2.6)'$$

とすれば、開路電圧 $v_0(t)$ は次の如くなる。

$$\begin{aligned} v_0(t) &= i(t) * Z_a(t) \\ &= \int \frac{I_m \omega_0 \rho}{\rho^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{A \Omega \rho}{(\rho + \beta)^2 + \Omega^2} \quad \text{-----} (3.2.6)'' \end{aligned}$$

この結果は次の如くなる。

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \frac{A \omega_0 \Omega I_m}{\sqrt{(\Omega^2 + \beta^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \varphi_1) \\ &\quad + \frac{A \omega_0 \sqrt{\Omega^2 + \beta^2} I_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2 + \beta^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} e^{-\rho t} \cos(\Omega t + \varphi_2 + \varphi_3) \\ \varphi_1 &= \tan^{-1} \frac{2\omega_0 \beta}{\Omega^2 + \beta^2 - \omega_0^2} \\ \varphi_2 &= \tan^{-1} \frac{\beta}{\Omega} \\ \varphi_3 &= \tan^{-1} \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \beta^2} \quad \text{-----} (3.2.7) \end{aligned}$$

この數値計算を行ふ代りに $Z_a(t)$ の原形インピーダンスを其の儘 $i(t)$ に相乗し、即ち、現象演算を行つて求めた $v_0(t)$ の値を3.2.18図に示す。

その縦軸單位は volt/Amp であつて $Z_a(t)$ の目盛の $1/5$ で示した。最大値は 40.5 volt/amp である。若し遮斷電流が $\sqrt{2} \cdot 200$ amp の常用電流であれば、開路電圧は 11,600 volt が其の最大値である。

b. 最大電流遮斷

線路電流が最大の時瞬時切斷を実現する事は極く短時間域に現れる線路定數を對象としては不可能と考へられる。併し、前記計算に用いた長時間

域の定数を対象としては可能とみる」が考へらる。斯かる遮断を最大電流遮断と呼び、

$$i(t) = I_m \cos \omega_0 t$$

与る線路電流に対する $z_a(t)$ の相乗を計算して、開路電圧を求める。その計算式は

$$v_0(t) = - \frac{A \Omega \omega_0 I_m}{\sqrt{(\Omega^2 + \beta^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_0^2}} \sin(\omega_0 t - \varphi_1) \\ + \frac{A(\beta^2 + \Omega^2) I_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2 + \beta^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} e^{-\beta t} \sin(\Omega t - \varphi_4 + \varphi_3)$$

$$\text{但、} \varphi_4 = \tan^{-1} \frac{2\beta\Omega}{\beta^2 - \omega_0^2} \text{----- (3.2.8)}$$

とする。 φ_1, φ_3 は前項と同一である。この算式の数値計算は後に行ふこととし、今の場合はオシログラムより図形的に得られた $z_a(t)$ と $i(t)$ とより現象演算を行った結果を示せば第3.2.19図の如くである。前の零電流遮断の場合に比し、振動が旺盛且つ電圧値が大きい。前項と同一目盛で、最大値 109 volt/amp を生ずる。 $\sqrt{2} \cdot 200$ amp 程度を遮断するものとするには最大 30,000 volt の電圧を生起する。

ii 三相送電線として取扱つた場合の開路電圧

a 線路定数

単相送電線として取扱ふことは簡単であるが實際的でない。これよりもつと精密度を増す爲に全回路を対稱三相同路として取扱い、開路電圧を求める。この爲に長時間域に於ける送電線インピーダンスの線間定数値を決定して置かねばならぬ。測定に依り得られた実験式は新旧両ケーブル回路を通じて

1. 一線対二線大地間インピーダンス

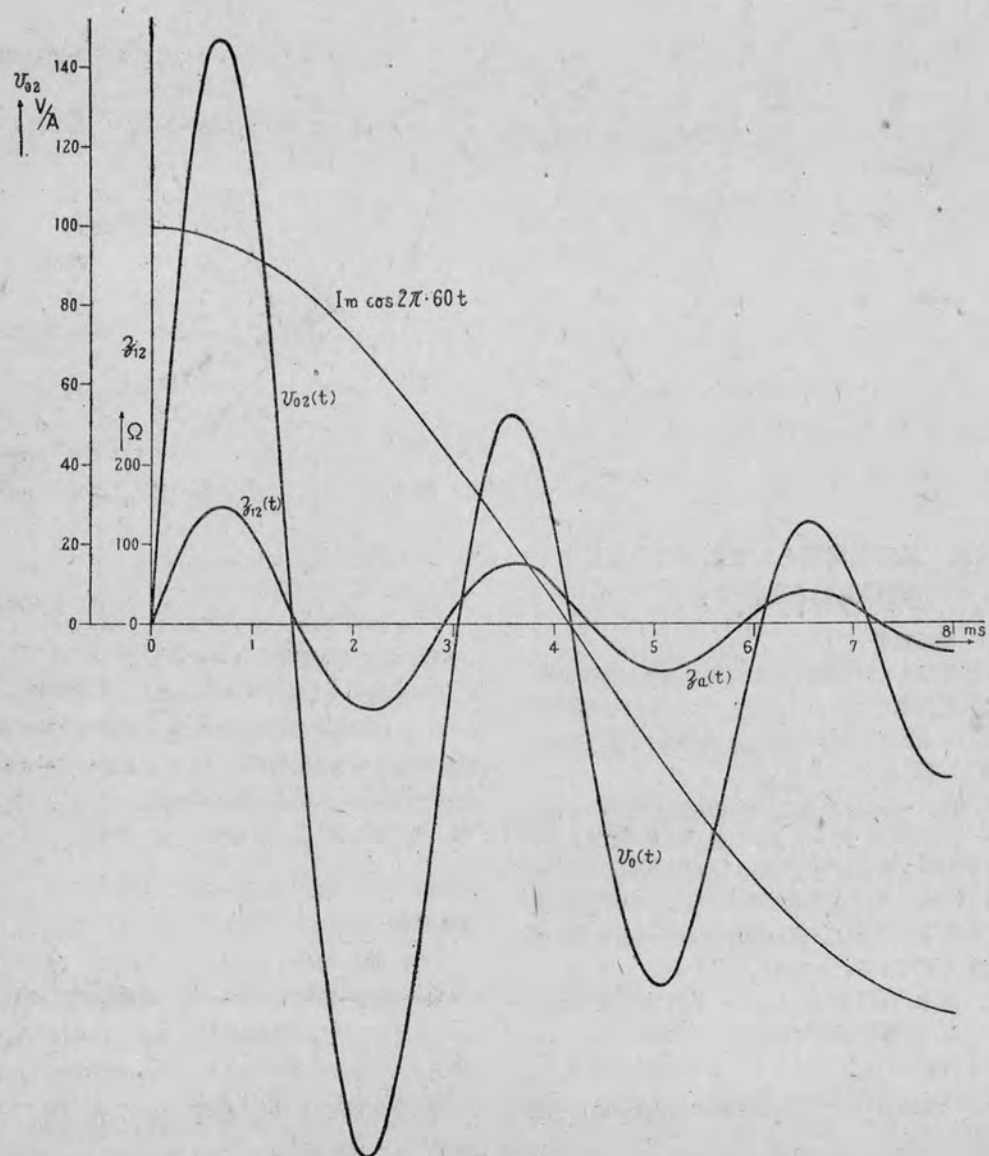
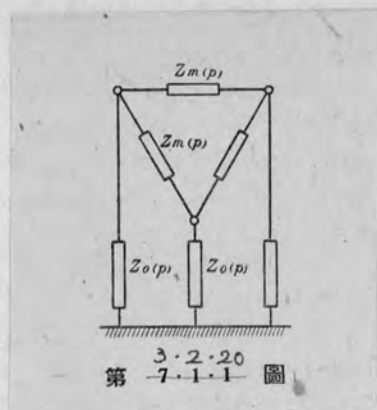
$$z_1 \doteq B_1 e^{-\rho_1 t} \sin \omega_1 t \text{----- (3.2.9)}$$

2. 三線一線大地間インピーダンス

$$z_2 \doteq t/c \text{----- (3.2.9)'}$$

である。之等を演算子函数化し、 $Z_1(p)$ 及 $Z_2(p)$ とし第3.2.20図の如き等価回路を作る爲に、線間及対地定数 $Z_m(p)$ 及 $Z_0(p)$ を求め然る後之を基準として一線対二線回路のインピーダンス $Z_{12}(p)$ 及一線対一線定数 $Z_{11}(p)$ 等を決定する事が出来る。

之等を計算するに



3.2.21
第 7.2.1 圖

$$Z_{12}(p) = \frac{9B_1\omega_1 p}{(9-B_1\omega_1 c)p^2 + 18\beta_1 p + 9(\beta_1^2 + \omega_1^2)} \quad \dots\dots\dots (3.2.10)$$

$$Z_{11}(p) = \frac{4}{3} Z_{12}(p) \quad \dots\dots\dots (3.2.11)$$

となる。代表的資料として、旧ケーブル洲本側変圧器短絡時のオ3.2.8図[2]及[4]の値をとれば、

$$Z_{12}(p) = 171 \frac{2.15 \cdot 10^3 p}{(p + 2.05 \cdot 10^2)^2 + 2.15 \cdot 10^3 p} \quad \Omega$$

$$Z_{11}(p) = 228 \frac{2.15 \cdot 10^3 p}{(p + 2.05 \cdot 10^2)^2 + 2.15 \cdot 10^3 p} \quad \Omega$$

となる。

b. 最大電流遮断電圧の計算

(3.2.8)式を用ふる事が出来るから、 $Z_{12}(p)$ 即ち一線対二線歸路の遮断電圧を計算すると、

$$V_0(t) = 171 [-0.179 \sin(377t - 0.034) + 1.03 e^{-2.05 \cdot 10^2 t} \sin(2.15 \cdot 10^3 t - 0.006)] I_m$$

これを曲線に画けば、オ3.2.21図の如くなり、その最大値147 volt/ampである。 $\sqrt{2} \cdot 200 \text{ amp}$ の遮断で40,200 voltが一線対地間に現れる。

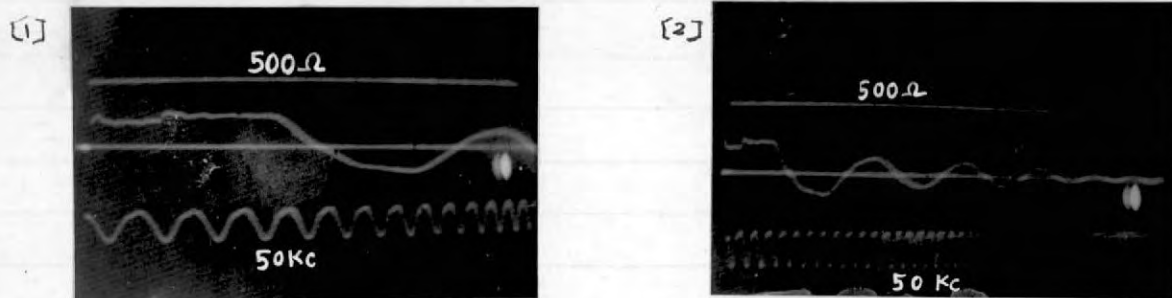
尚一線対一線遮断では其の線間にこの電圧の4/3倍(大地へはその1/2)の電圧が出現する。となる。

この線路の性質に關し研究すべき事は多いが、本章ではインディシヤル・インピーダンス測定法の應用に対する一例題として提示するに止め本節を終る。とする。

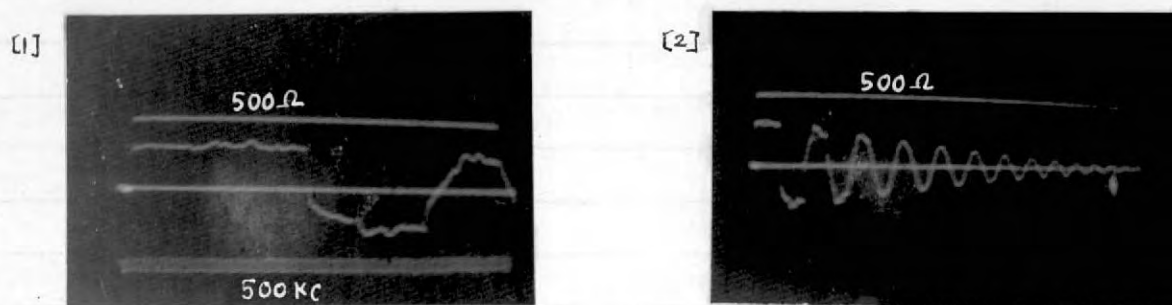
3.3 山科-阪本間木柱送電線路の特性

3.3.1 実測方針及測定項目

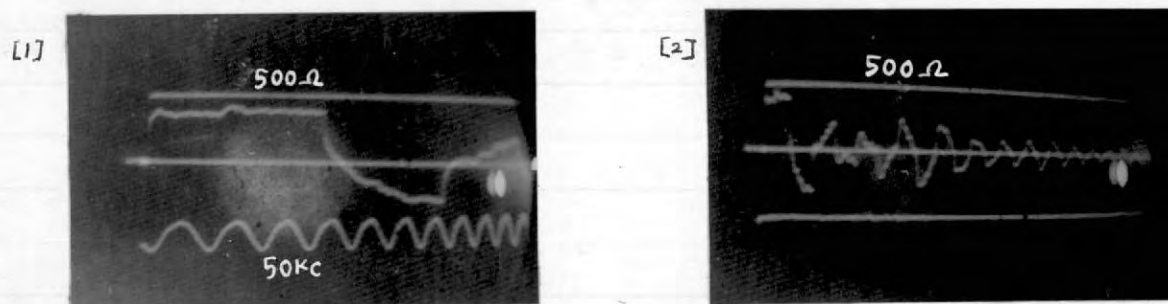
本送電線は京都山科間の四宮変電所を起點とし、滋賀縣阪本に達する全長9.3 Km 三相11 KV一回線の木柱送電線であつて、線路中央部に標高370mの長葺山があり、この頂部を山越ししてゐる。全体として平均電線高さ8m 線間距離100cmで可成り構造的・地勢的に不斉度の多い線路である。本送電線は昭和23年8月發送電災害防止委員會が自然管測定用にご利用し、其の線路特性を分明ならしめる事は雷觀測上からも極めて重要視される事情の下にあつた。測定地長を阪本変電所に置き、此處より見た本



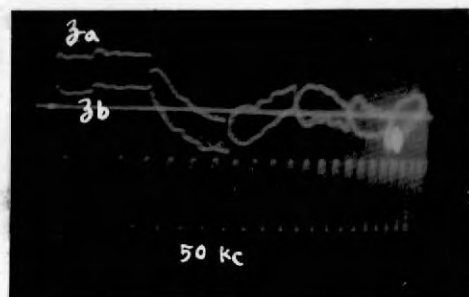
第 3.3.1 圖 三線-接對地面測定



第 3.3.2 圖 一線對他線大地面測定



第 3.3.3 圖 一線獨立對地面測定



第 3.3.4 圖 一線對他線電壓比

送電線のインディシャル・インピーダンスと、同変電所の受電変圧器の線路側から見たインピーダンスとを測定した。送電線は途中撚架二回を以て対稱化されて居るが、各線定数を調査する為 A, B, C 各線毎に同一測定を繰返した結果概ね各線定数が均一であることを確認した。試験項目は次の如くである。

[a] 送電線部分の測定 (山科側三線一括接地)

- i 三線一括対地間 ($A, B, C : E$)
- ii 一線対二線対地間 ($A : B, C, E, B : A, C, E, \dots$)
- iii 各線単独対地間 ($A : E, B : E, \dots$)
- iv 一線對他線電圧比 ($A : B, B : C, C : A \dots$)

[b] 送電線部分の測定 (山科側開放)

- v 三線一括対地間 ($A, B, C : E$)
- vi 各線単独対地間 ($A : E, B : E, \dots$)
- vii 一線對他線電圧比 ($A : B, B : C \dots$)

[c] 変圧器部分の測定

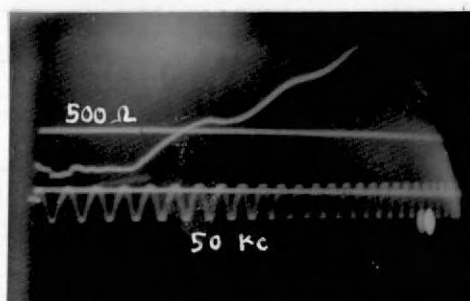
- i 二端子間測定 = 次側短絡
- ii 同上 = 次側 500Ω 橋絡
- iii 同上 = 次側開放
- iv 一端子対大地間測定 = 次側短絡
- v 同上 = 次側 500Ω 橋絡
- vi 同上 = 次側開放

3.3.2 送電線部分の測定

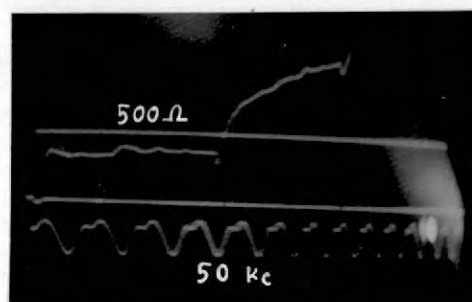
3.2.1 山科側三線一括接地の場合

測定回路は前節第 3.2.4 図類似の回路で、 $R_m = 10\text{K}\Omega$ $R_s = 500\Omega$ に撰んだ。第 3.3.1 図 [1][2] は三線一括大地間インピーダンスのオシログラムである。其の初期波動インピーダンスは 230Ω であるが、以後不規則に変化し、最低 175Ω 最高 260Ω に達する。 $t = 71\mu\text{s}$ にて負反射が現れるが著しく減衰して居る。図の長時間域オシログラムを送電線の $1/4$ 波長振動と見做すと其の振動周波数は 5.4Kc 初期の減衰時定数 $310\mu\text{s}$ 終期に於て $900\mu\text{s}$ を有して居る。

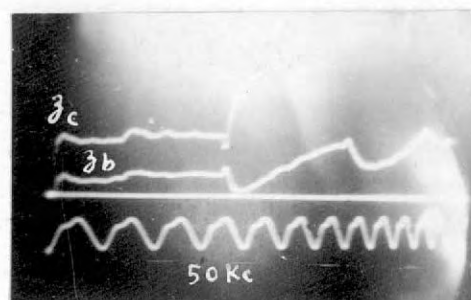
第 3.3.2 図 [1][2] は代表例として撰んだ A 線対 B, C 線大地間インピーダンスのオシログラムであつて、前者と著しく相違し、波動インピーダンスの変化が僅ちとなり、初期値 310Ω 最低 300Ω 最高 330Ω に過ぎない。他方負反射の到達時刻は $68\mu\text{s}$ であつて前より小さく又減衰が著しく小さ



第3.3.5圖 三線一拾對地面



第3.3.6圖 一線獨立對地面



第3.3.7圖 一線對他線電位

い。同図[2]のオシログラムより、 $1/4$ 波長振動として見た振動周波数は 6.8kHz 減衰時定数は $940\mu\text{s}$ である。

※3.3.3 図[1][2]はA線単独対地間のインピーダンスオシログラムで、一線独立測定のための代表例である。初期波動インピーダンス 390Ω 最低インピーダンス 340Ω 最高 420Ω の値を取り、やや不均等とまっている。

$t = 68\mu\text{s}$ にて変圧射波が到達し、その減衰状況はさきの両場合の中間程度である。 $1/4$ 波振動として見た時同図[2]のオシログラムより明かす如く、振動周波数は優勢を 6.8kHz と劣勢を 5.4kHz の混在形となり、軽微な陰り振動を起して居る。其の全体としての減衰時定数は $940\mu\text{s}$ である。

※3.3.4 図はA線対大地間のインピーダンスとB線伝達インピーダンスを與へるオシログラムである。この両インピーダンス波形は、時間が経過すると共に位相が相対する $1/4$ 波長振動となり、所謂パッシブ振動形を呈して居る。初期の両線間電圧比は 0.39 で、これは両線の結合定数を與へる。
3.2.2 山科側開放の場合、

測定回路は前節同様である。山科側の開放は完全に行けず、其の終端に亘長 1.1km のケーブルが附着したが之を切離すことが出来ぬ状態であつたので己む無く、其の儘測定を施行した。測定中、近接 66kV 他送電線よりの誘導が強く、爲に送電線電位が浮動し、この爲得た資料も多少不確実である。

※3.3.5 図は三線一括大地間のインピーダンスであつて、正交射波到達の波動インピーダンスの変動状況は短絡測定の場合と同一と認められる。

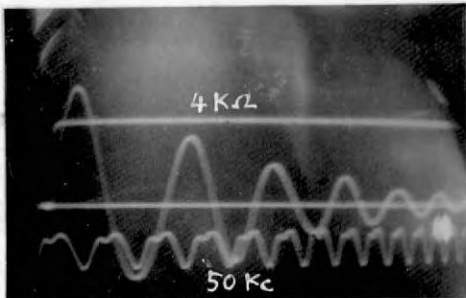
※3.3.6 図はB線対大地間のインピーダンスであつて、やはり正交射到達のインピーダンスの消長は開放の場合と同一と認められ時刻 $68\mu\text{s}$ に一旦負交射があり、後正に転ずるのは明かに終端 1.1km のケーブルの存在によるものである。

※3.3.7 図はC線のインディシャル・インピーダンスとB線の伝達インディシャル・インピーダンスを與へるオシログラムであつて、両線間電圧比を與へるものである。

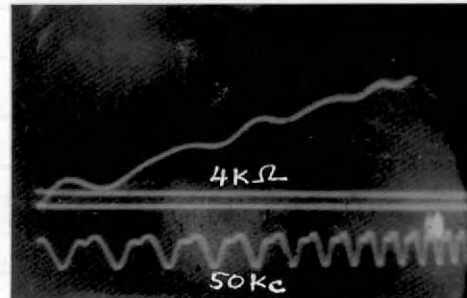
3.3.3 変圧器部分の測定

坂本変電所の受電変圧器に就て、其のインディシャル・インピーダンスを測定した。測定回路は、第3.2.4図類似の回路で、 $R_m = 110\text{k}\Omega$ $R_s = 4\text{k}\Omega$ に選んだ場合と、 $R_m = 730\text{k}\Omega$ $R_s = 4\text{k}\Omega$ に取った場合の二者である。

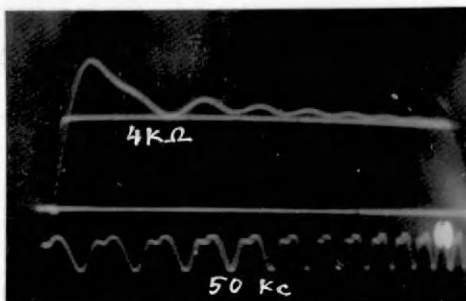
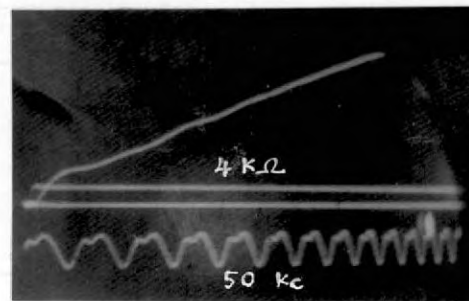
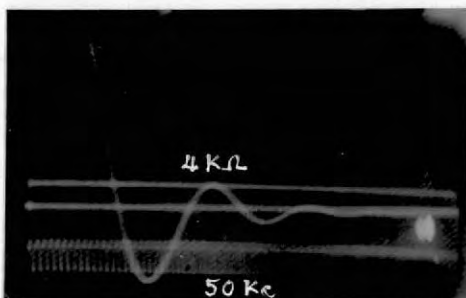
※3.3.8 図[1][2][3]は二端子間インピーダンスのオシログラムで、二次抵抗 R が零、 500Ω 、無限大の三種類のものを示す。 $R = 0$ のときインピーダ



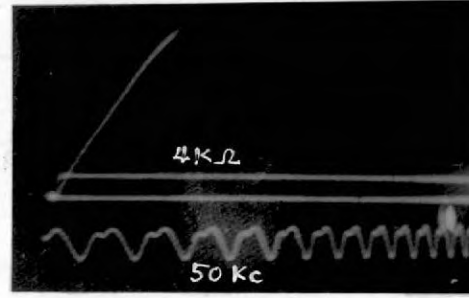
[1] 二次側短絡



[1] 二次側短絡

[2] 二次側 500Ω 抵抗負荷[2] 二次側 500Ω 抵抗負荷

[3] 二次側開放



[3] 二次側開放

第3.3.8 圖
二端子間 インピーダンス

第3.3.9 圖
一端子対地間 インピーダンス

ンスは、周波数 23.5 KHz の単一減衰振動となり、其の減衰時定数 $81 \mu\text{s}$ 初期最大インピーダンス $5.7 \text{ K}\Omega$ である。 $R=500 \Omega$ とすると、初期最大インピーダンスは $7.3 \text{ K}\Omega$ とするが、減衰は急増し、迅速的に $4.2 \text{ K}\Omega$ の終局インピーダンスを取る。この値は変圧器の変圧比 $11,000^{\text{V}}/3,300^{\text{V}}$ より一次側に換算した二次側の抵抗分 $5.55 \text{ K}\Omega$ より若干小さい。 $R=\infty$ とすると、前例と同一の短時間域では單向性の上昇インピーダンスであるが、時間域を長くすると、非常に周期の長い単一減衰振動波であることが判明する。其の振動周波数は、 1.9 KHz 減衰時定数約 $230 \mu\text{s}$ 推定初期最大インピーダンス $70 \text{ K}\Omega$ である。

オ3.3.9 図 [1][2][3] は一端子大動向に就て測定したインピーダンスのオシログラムであつて、 $R_{in}=440 \text{ K}\Omega$ とし、標準抵抗の振巾を小さく圧縮し、測定範囲を拡大する。 $R=0$ に於ては微弱な振動分を重畳せる上昇インピーダンスで、 $4,800 \mu\text{F}$ の容量的性質を示し、長時間の掃引を行つても下降する丁が無い。 $R=500 \Omega$ では振動分は減衰し、結局の見掛け静電容量は若干減少する。 $R=\infty$ に於ては振動分は消失すると同時に見掛け終局静電容量は更に激減する。

3.3.4 論 議

前述の如きインディシャル・インピーダンスの実測結果に対し、若干の意見を追加する。

i 送電線部分

先づ本送電線路は著しく線路分布定数が不均一であることが指摘される。

殊に波動インピーダンスの測定値に於ても $35 \mu\text{s}$ 附近に生ずる増加性の小突起は明かに線路中央部に位置する長等山の影響で、この部分で線路定数が急変して居る丁が指摘出来る。特に興味を引く事は、三線一括の測定にこの影響が強く現はれ、一線対二線帰路測定では余り現れて居まい事である。即ちこの事情は線路定数の不均一が、専ら対地定数に就て起り、線間定数は余り変化して居ない事を示す。故に山地附近では送電線實効高さが可成り増大するものと考へてよい事を示すものである。次に、対地帰路の影響電圧比の減衰が、著しく大で、線間測定のものと比較に若干程度大きい丁も頗る示唆に當るもので、大地固有抵抗及諸電体的性質の影響が容易く漏却し得まいものである丁を示して居る。更に送電線の $1/4$ 波長自由振動を観察するに、対地帰路の振動周波数と、線間相互の夫とが、 $1:1.26$ 程度に値が異なることである。同様に反射波到達時刻から推算して対地帰路の波動傳播速度は $265 \text{ m}/\mu\text{s}$ であるのに、線相互間のものは $280 \text{ m}/\mu\text{s}$

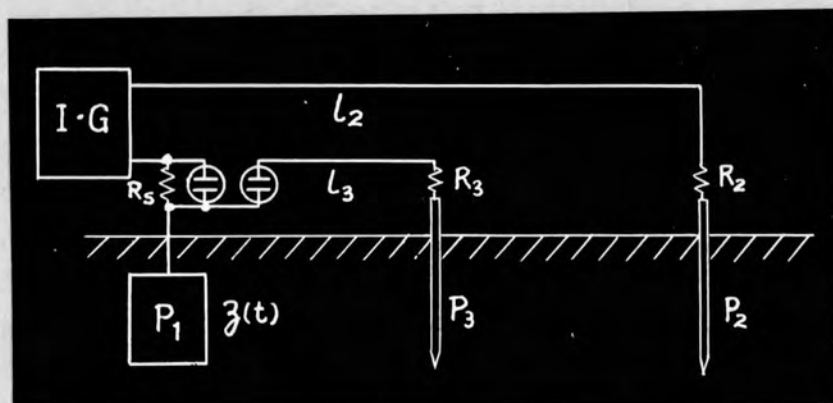
であつて、其の間に1:1.05の開きがある。前節2.2に於て、ケーブルの映像電圧比と其の二相束三相束の計算値を第3.2.3図に示したが、一見して明かき如く、減衰性の強い場合の映像電圧比は、距離を経過するに従つてその立上り部分が不鮮明とさる首のである。微細な波は理論上光速若しくは之に近い速度で、波の主部に先んじて伝播してみても知れまいのであるが、オシログラフの分解能に限度がある爲に、之を判別することが出来まい。判別可能の波形初期値の、波動伝播速度は距離を増す程、又減衰性が多い程遅くなるものである。斯かる理由で、対地帰路と線相互間の波動伝播速度の相違は全く減衰性の相違に基くものと説明出来る。次に之が $1/4$ 波長振動の形式とまつて来ると、何故其の振動周期波数の上で、著しく開いて来るのかと云ふ理由は同様に減衰性の相違によるものと指摘出来るが、本送電線の如くに著しく異つて来る理由は線路分布定数の不均一から説明し得るものである。即ち一般に多数の縦続線路で、各線路部分の波動インピーダンスが異なるときは、其の全体としての固有振動周期波数は、線路全長を基とする固有振動周期波数より低くなるのであつて、之は格子図を使用して簡単に説明出来る。即ち本線路の如く、線路定数より対地定数に不均一が著しければ、当然対地固有振動周期波数は低くなるのである。

最後に、本線路の波動インピーダンス及び映像電圧比の分離を正確に行ふ事は著しく計算が困難である。故に波動インピーダンスの形状は図形的に反射波到達迄のものを取り、映像電圧比は $\alpha=1$ 正反射波から、 $\alpha=-1$ 正反射に至る迄の形状を取つて概略的に之を代表せしめるが良い。

ii 変圧器部分

本変圧器のインディシャル・インピーダンスの測定波形は先づ、変圧器として代表的な波形を持つものと考へられる。第3.3.8図[1]の単一減衰振動は専ら一次及二次線路の結合漏洩インダクタンスに基く固有のものである事は同図[2]に明かき如く二次抵抗 500Ω に於て概ね制動せられるから判明せられる。この事情は二次側線路の波動インピーダンスが 500Ω 程度あれば、この変圧器の内部電位振動は大いに制動せられる事を物語るものである。同図[3]は二次開放の場合の振動であつて、この場合は変圧器鉄心を主磁路とする一次線路インダクタンスの固有振動である事は明白であつて、この振動の減衰が強いのは、鉄心損失の影響に基くものであら

り) 格子図の解説に關しては Bewley: Travelling wave on Transmission system (1933)⁽¹²⁾ にあり、又之を使用する縦続線路の振動同期の計算は、前出 電評 36・13 (昭23-6)⁽¹¹⁾ 参照



第3.4.1圖 接地抵抗測定原理圖

う。

一端子対大地間に就て測定したインディシャル・インピーダンスは、終局的には容量として現れ、之は充分長時間域を取れば、物理的に一次線路の分布静電容量に等しい値をとる筈である。其の正確な値は $R=0$ の時のインピーダンス曲線の漸近線が、最も之に近く、 $R=500\Omega$ に於ては鉄心を含むインダクタンスの影響が現れ始める為、見掛け容量は若干小さくなり、 $R=\infty$ に於ては非常にこの傾向が強くなる。然し現象を論ずる時間域が狭い時は、その時間域の見掛け上の数値を取つてよい事は勿論である。 $R=\infty$ に於て、見掛け容量が小さくなる事を物理的に説明すれば、次の如くである。二次線路が開放である為一次巻線の一端より他端へ到る電流波の侵入が遲々となり爲に最初は見掛け上線路端未附近の静電容量だけが出現するのである。

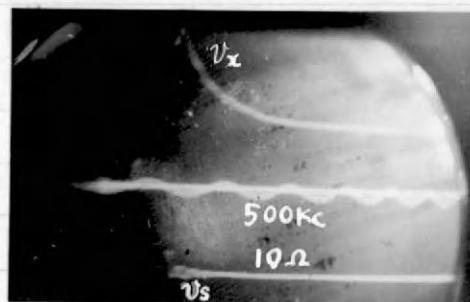
3.4 接地インピーダンスの測定

3.4.1 測定方針及計画

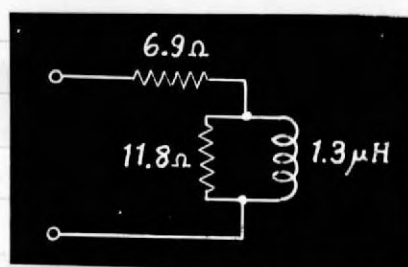
気激する衝撃波に対して、接地抵抗の値が一定値を示すか否か、疑問視される事は周知のものである。その接地抵抗の变化状況は二様の意味がある。一は衝撃大電流による地中電流の影響が考慮される場合と、他は斯かる状態に到らず、純然たる電気回路現象として起きる場合の二者である。

インディシャル・インピーダンス測定法の応用として考へべきは勿論後者の場合である。而して斯様を接地インピーダンスの測定法は厳密に其の根據を作る事が困難である。故に茲では暫定的に電極電位降下法の定義に従ふ如き測定法を其の基準とする事にした。第3.4.1図は其の方法の原理的構成図を示す。 P_1 は被測定接地電極、 P_2 は補助接地、 P_3 は探針電極であつて、 P_1, P_2 の中間附近に置く。 P_1, P_2 は數十cm離隔する。 R_s は標準抵抗であつて、 I, G の強制電流に対し、 P_1, P_3 間の電極間電位差と同程度の電位降下を生ずる如く値を選ぶ。 l_2, l_3 は夫々架空線路として展張せる導線であつて、 R_1, R_2 は各導線の対地波動インピーダンスの程度に選ぶ。 l_2, l_3 は相互間の結合を避ける如く配置する。オシログラフは図の位置に偏位板を挿入するが、その電源及操作装置一式は電位可浮動の状態に置き、偏位誤差を避けるがよい。以上の如き測定法は導線 l_2 に沿ふ地中電流の電位降下を測る事になるから、導線 l_2 に沿ふ接地インピーダンスの測定と云ふ可きである。

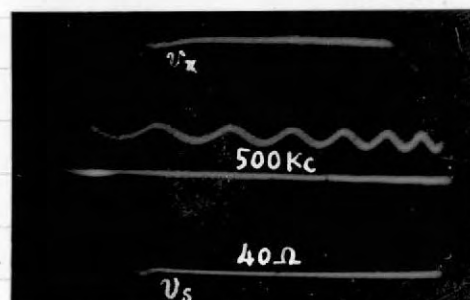
實際の発電所内接地は多数の接地電極が連絡せられあるが故に、其



第3.4.2図 所内接地のインピーダンス



第3.4.3図 同上等価回路



第3.4.4図 棒接地のインピーダンス

のインピーダンスの測定資料を多数蒐集する丁には非常に興味がある丁であるが、何分にも測定器が粗大であるので、運輸上の問題から未だ多数の記録を収録するには到って居ない。茲では仮変電所に於て前節の如き送電線試験を行った機会に求め得た同変電所の棒地インピーダンスの記録を一例紹介する丁とする。実測方法は前述の第3.4.1図と同一の構成である。P₁, P₂間の距離は27mに取り、陰極線オシログラフ及衝擊電圧発生装置の電源は蓄電池及電動発電機を用ひ、諸装置はP₁上に集結して対地静電容量を減ずると共に電位浮動に伴ふ誤差の発生を防止した。尚P₁が所内棒地で無く、寧ろ棒地棒の場合には如何なる棒地インピーダンスを示すか共に確かめる事とした。

3.4.2 実測記録

第3.4.2図は $R_s = 10\Omega$ にした場合の v_s 及 v_x を示すオシログラムであつて、棒地インピーダンスは初期値 18.7Ω から終局値 6.9Ω の間を明瞭に変化して居る。其の変化状況は略次の実験式で示す事が出来る。

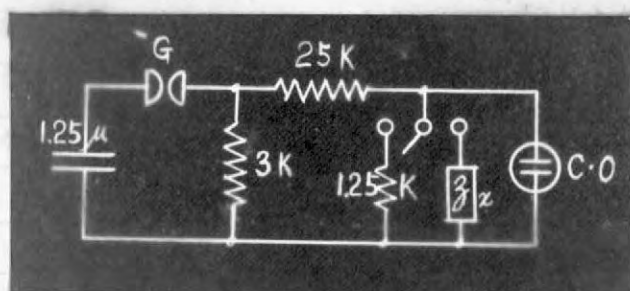
$$z(t) = 6.9 + 11.8 e^{-t/1.1 \cdot 10^{-6}}$$

之を演算子函数化すれば次の如くなる。

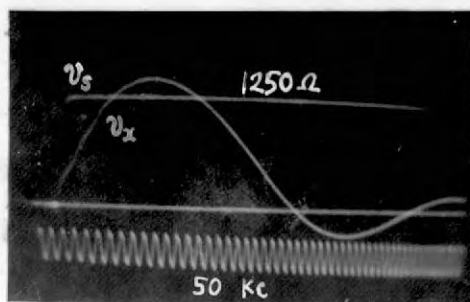
$$Z(p) = 6.9 + \frac{1}{\frac{1}{11.8} + \frac{1}{1.3 \cdot 10^{-6} p}}$$

即ち其の等価回路を作るとが出来る。之は第3.4.3図の如く抵抗=個とインダクタンス1個の組合せ回路である。この所内棒地抵抗を別途棒地メガーで測定した定常値は 6Ω であつた。オシログラフに係る定常値と其の間に若干の相違がある。此の差違は現象的のものであるが、恐らくは、主として測定誤差に基づくものと思はれる。第3.4.4図は直径1.5cmの銅管を地中1m弱の深さに間隔50cmにて4本打込み其の合成棒地インピーダンスを測定したオシログラムであつて、測定回路は前例同様で、唯 $R_s = 40\Omega$ に取つただけである。其の電流波形 v_s は立上り初期は階段形をなし、電圧波形 v_x は立上り初期に振動をなすが、之は導線 l_3, l_2 間の誘導作用に基づくもので、この期間の測定値は不明確である。其の後は一常値 58Ω をとる。棒地メガーで測定した値は 55Ω であるので、殆ど兩者は一致して居る。

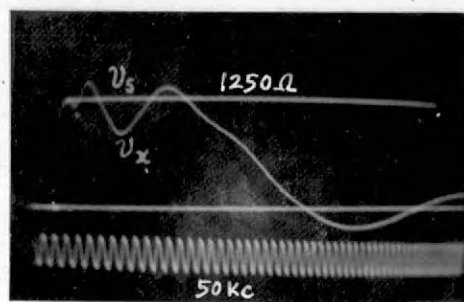
以上の結果から回路的に見た棒地インピーダンスは、棒棒地の如き集中棒地では、殆ど一定抵抗、所内棒地の如き分布棒地では、初期値が高く定



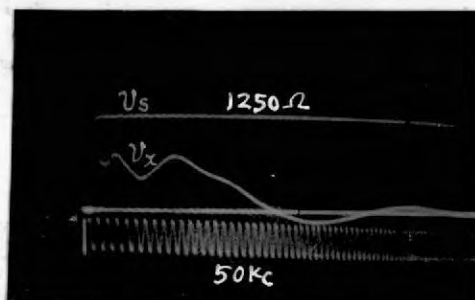
第3.5.1図 測定回路



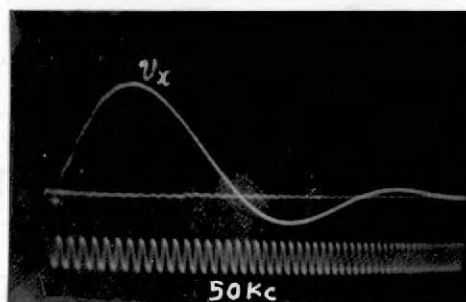
第3.5.2図 電機子刷子側印加の場合



第3.5.3図 界磁線輪側印加の場合

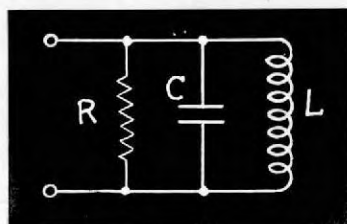


[1] 界磁線輪単独の場合



[2] 電機子単独の場合

第3.5.4図



第3.5.5図 等価回路

常値の低いインダクタンス性のインピーダンスを示すものと見てよい。

3.5 電車用電動機インディシヤル・インピーダンス及び保護蓄電器の設計に対する応用

電車用電動機を運転中、急遮断を行ふ時に屢々異常電圧を生じ、制御継電器及電動機内部絶縁を脅威することがある。之を防圧する対策として、保護蓄電器を設置する場合、容量の決定法に就き一実例を挙げて、インディシヤル・インピーダンス測定法の応用例とする。

供試電動機は、日立製 25 H.P 880 R.P.M, 600 V, 37 A の定格を有する直巻電動機であつて、オ3.5.1図は之に対する端子インピーダンスの測定回路、オ3.5.2図は界磁線輪を接地側に置いた時の入端インピーダンス、オ3.5.3図は電機子刷子を接地側に置いた時の入端インピーダンスである。前者は単純な指数函数状減衰振動、後者は少くも三種類の前記振動の重畳形である。

オ3.5.4図 [1][2] は、参考の爲、界磁線輪と電機子と各独立に測定したインピーダンスであつて、明かにオ3.5.3図のオシログラムはオ3.5.4図 [1][2] の和である。

扱て、保護蓄電器の設計を爲す可く、オ3.5.2図の単純な方のインピーダンスを選び、其の実験式を作ると

$$z(t) = 3.28 \cdot e^{-3.47 \cdot 10^3 t} \sin 2\pi \cdot 1.06 \cdot 10^3 t \text{ K}\Omega$$

とする。其の演算子函数形を作り、且之を分解すれば、

$$Z(p) = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Lp} + Cp}$$

$$R = 3.14 \text{ K}\Omega \quad C = 0.0458 \mu\text{F} \quad L = 0.0963 \text{ H}$$

とする。即ち、オ3.5.5図の如きものである。斯かる R, L, C 並列回路のインピーダンスは、

$$z(t) = \frac{1}{\omega C} e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

$$\alpha = \frac{1}{2CR}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

であるが、其の最大インピーダンス即ち第一波の波高値は

$$z_{\max} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \left(\frac{1}{LC} \leq \alpha^2 \right)$$

である。故に保護蓄電器として電動機に MC を並列に入れば、開路電圧は $1/\sqrt{n}$ に縮減される。供試電動機では、其の定格電流 37 Amp の急遮断に依つて起る開路電圧は最大 $53,700\text{ Volt}$ である。之を $1/10$ に縮減するに必要蓄電器容量は $4.6\mu\text{F}$ である。實際上斯く急激に遮断が行はれるとは考へられまいが、理論的考察として最上限度を抑へる目的の爲には以上の計算で充分である。

3.6 結 言

以上五節に亘り、インディシャル・インピーダンス測定法の適用に好適なる応用分野の一例を紹介したが、斯かる狭小な部面ではなく、本測定法は広く萬般の諸分野に適用の効くものである。併し乍ら、多くの場合、インディシャル・インピーダンスは其の波形を使って応用計算を行はんとするより、其の波形自体の形狀が如何なる消長を取るかを視察する丁自体、乃至は其の測定に成功する丁自体が、一つの研究なのであつて、定性的、及定量的な諸実測資料を諸機器に対し豊富に揃へる丁が、将来に残された大きな課題である丁を再言する。而して、インディシャル・インピーダンス測定に対し取られるべき手法として 第二京大法はこの内最も理想に叶ふものの一つである丁を確信する。

尚次章には包絡演算法に対する応用を述べらるが、之は余りに問題が大きいのので、特に本章に収める事無く別に一章を設けた次第である。

第 IV 章

インディシャルインピーダンス測定法の 包絡演算法に対する応用

4.1 緒 言

インディシャル・インピーダンス測定法の一応用として包絡演算法に対するものは最も鮮麗な形態をなすものの一つであらう。其の内容を理解するには先づ包絡演算法なるものの実態を紹介する事を要する。この演算法は筆者に依りて創始せられ、將來多くの適用分野を残すものであるが、本章では一通りの基礎的構成事項を列記しインディシャルインピーダンス測定法との關聯性を明瞭をらしめるだけに止める。

按て、包絡演算法と云ふのは高周波増巾器、濾波器、周波数変調器、同復調器等々の振動系に、其の固有振動數に極く近似せる周波数の駆動力を加へた時、其の駆動力の振巾及位相が振動系内に如何様の振巾及位相を以て伝達されるかと云ふ如き命題を一舉に解決する態の、近似演算法の稱であつて、包絡なる語を冠したのは、振動函數個々の振動を内題とせず、其の包絡函數のみを取扱ふが爲である。本法の適用は、従来周波スペクトルのみを以て論ぜられて居た中間周波増巾器の増巾歪、或はレーダー増巾器に於ける衝撃波の波形増巾歪曲等の問題を扱ふに好適である。本章では、最初包絡演算法に使用する慣用術語の基本的定義を行ひ、然る後包絡演算法の構成を述べる。この演算子法は、結局通常の Heaviside 演算子法と、平面ベクトル演算子の組合せで構成し得る事を證明し、更に相乘図形を基礎とする證明を以て、前者と同一の帰結を收め得る事を明かにする。次に Q 函數なる特殊函數を定義して、通常振動系過渡現象が之に依り論じ得る事、更に連續的周期音の實際的波形に就て其の中間周波増巾歪曲の實際的計算を示す。最後にインディシャル・インピーダンス測定法との間に存在する最も重要な關聯性を指摘し、尚励振固有波測定法と與へる。其の實驗例として中間周波変成器に就て、基準及励振固有波の測定を行ひ、インディシャル・インピーダンス測定法の応用分野を明かならしめる。

4.2 包絡演算法の紹介

4.2.1 用語、記法及基礎定理

包絡演算法と之に附隨する演算子法とは、其の名稱及内容共に從來存在しなかつた新しい事柄であるから、之を体系化する爲種々の用語を創生せねばならず、之等に対し一定の定義及規約を與へねばならない。夫等の主

要なものは次の如きものである。

(1) 用語

a. 振動函数

定義：特定の周波数で調和振動をなす時間函数を振動函数と呼称す

規約：包絡演算法に於ける振動函数の振動周波数は、其の函数の振幅及位相角の時間函数的消長に比し極めて大なる事

振動函数を数式的に表すと次の如くなる。

$$u(t) = U(t) \sin[\omega t + \varphi(t)] \quad \text{----- (4.1.1)}$$

この際振動函数は、ゴシック体で表現する事に統一する。

b. 正規周波数, 正規角周波数, 剰余角

定義：(4.1.1)式で表される振動函数に於て $\omega/2\pi$ を正規周波数、 ω を正規角周波数、 $\varphi(t)$ を剰余角と稱す

(4.1.1)式で ω と $\varphi(t)$ は任意に選定出来るから其の間に無数の組合せがある。故に次の如き規約を設ける。

規約：正規周波数は駆動力に於けるものを以て基準とする。現象を取上げる時は時間域に於て

$$\varphi(t)/\omega t \ll 1, \quad \varphi(0)/\omega \ll 1 \quad \text{----- (4.1.2)}$$

なる事

c. 包絡函数

定義：振動函数が(4.1.1)で表される時 $U(t)$ を包絡函数と呼ぶ。

規約：(4.1.1)を分解し

$$u(t) = U(t) \cos \varphi(t) \sin \omega t + U(t) \sin \varphi(t) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{----- (4.1.3)}$$

とした時 $U(t) \cos \varphi(t)$ 或は $U(t) \sin \varphi(t)$ の如きもやはり其の振動函数に対する包絡函数と呼ぶ。

d. 正規スペクトル, 振巾スペクトル

定義：振動函数を、正規周波数の等間隔周期で切り、其の等間隔位置に於て計量せる振動函数の値と其の位置を正規スペクトル、振動函数の最大振巾及其の位置を振巾スペクトルと呼ぶ。

e. 単位振動函数, $\delta[\omega]$ 波, $\delta[\theta]$ 波, $\delta[\varphi(t)]$ 波

定義：(4.1.1)式に於て $U(t) = H(t)$ なる時その振動函数を単位振動函数と

呼稱し特に $S[\psi(t)]$ の記号で表す。即ち次の如くである。

$$S[\psi(t)] = H(t) \sin[\omega t + \psi(t)] \text{ ----- (4.1.4)}$$

上式を分解し

$$S[\psi(t)] = \cos \psi(t) S[0] + \sin \psi(t) S[\frac{\pi}{2}] \text{ ----- (4.1.5)}$$

として表し、 $S[0]$ 及 $S[\frac{\pi}{2}]$ を夫々単位振動函数と呼稱し、夫々 $S[0]$ 波、
及 $S[\frac{\pi}{2}]$ 波と呼ぶ。一般に $\psi(t)$ 及 $\psi(t) = 0$ を含む場合には、夫々
 $S[\psi(t)]$ 波及 $S[0]$ 波と呼ぶ。

規約：単位振動函数は特に指定せざる時には $S[0]$ 波を指すものとする。

4. 包絡ベクトル

定義：振動函数が (4.1.1) で表される時

$$\dot{u}(t) = u(t) e^{j\psi(t)} \text{ ----- (4.1.6)}$$

と表し $\dot{u}(t)$ を包絡ベクトルと稱する。

規約：包絡ベクトルを使用した時にも常に振動函数は実数なる事。計算
の便宜上実数なる振動函数を、次の如き記法の下に使用する。

$$\dot{u}(t) = \dot{u}(t) S[0] \text{ ----- (4.1.7)}$$

$$\text{但、 } u(t) = |\dot{u}(t)| S[\text{Arg } \dot{u}(t)] \text{ ----- (4.1.7)'} \quad \text{である事。}$$

注意： $u(t)$ は (4.1.1) の如くであつても $\dot{u}(t)$ は決して

$$\dot{u}(t) = u(t) \{ \cos[\omega t + \psi(t)] + j \sin[\omega t + \psi(t)] \}$$

の意味ではまい。 $\dot{u}(t)$ は包絡函数に対して、複素量表示をさす意味であ
つて、(4.1.7) 及 (4.1.7)' が正しい定義形である。

5. 基準固有波函数、励振固有波函数

定義：振動系に $H(t)$ なる単位駆動力が加へられた時の應動振動波を基準
固有波函数と呼ぶ。次に駆動力が、 $S[0]$ なる単位振動函数なる時の應動
振動波を励振固有波函数と呼ぶ。

電気回路に於ては、インディシヤル、インピーダンス或はアドミッタ
ンス、電圧比、電流比等が基準固有波函数に匹敵する。

(ii) 記法

a. 変換子 \mathcal{S} 及 \mathcal{L}

Heavisid 演算子法を基礎附けた形式で別の立場から導かれる Laplace
変換法に於て変換子 \mathcal{S} 及 \mathcal{L} を選定して夫々次の如く意味せしめる。

$$U(p) = \mathcal{L}^{-1} u(t) = p \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt \quad \text{-----} (4.1.8)$$

$$U(s) = \mathcal{L} u(t) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt \quad \text{-----} (4.1.8)'$$

後に p 及 s は演算子であつて、前者は Heavisid 演算子と呼ばれるものに一致する。前式の逆変換を次の如き変換子で書く。

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} U(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{U(p)}{p} e^{pt} \quad \text{-----} (4.1.9)$$

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} U(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U(s) e^{st} ds \quad \text{-----} (4.1.9)'$$

上の変換記号 \mathcal{L} は林重嘉博士¹⁾に依り書き下されたもので、変換記号 \mathcal{L} は Doetche²⁾ Stratton³⁾ 等が採用して居るものと同じであるが、Wagner⁴⁾に於ては \mathcal{L} と \mathcal{L}^{-1} とを同等に取扱つてゐる。併し、此の爲に起る混乱は演算子 p と s の相違に依り救ふ了とする。

b. 階段相乗記号 $*$ 及 衝撃相乗記号 \circ

Borel の定理を \mathcal{L} 変換演算子法に適用する場合と \mathcal{L} 変換演算子法に適用する場合とで、二種類の相乗定理を導く事が出来る。即ち前者の相乗記号を \circ ⁵⁾ 後者の夫を $*$ ⁶⁾ で表せば、

$$u_1(t) \circ u_2(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) d\tau \quad \text{-----} (4.1.10)$$

$$u_1(t) * u_2(t) = \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) d\tau \quad \text{-----} (4.1.10)'$$

となる。前者の微分を部分積分に変形すれば、

$$u_1(t) \circ u_2(t) = u_1(0) u_2(t) + \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) d\tau \quad \text{-----} (4.1.10)''$$

を得る。この形式は Duhamel の積分定理として知られてゐるものである。

1) 林: 電評 29.121 (BB 16-2)⁽¹³⁾

2) G. Doetche: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (1937)⁽¹⁴⁾

3) J.A. Stratton: Electro Magnetic Theory (1941)⁽¹⁵⁾

4) K. Wagner: Operatorenrechnung (1940)⁽¹⁶⁾

5) K. Dahr⁽¹⁷⁾ は \times を用ゐる記号を使つてゐるが、之は紛はしいので現象演算の立場では \circ を使ふこととしてゐる。

6) Doetsche, Wagner 等に依り使はれてゐるものと同じである。

同定理の誘導原理は階段状微小単位函数に対する微小対応の積分を求める手續から出發して誘導されるから、この相乗 $*$ を階段相乗と呼ぶ。同様に(4.1.10)式の相乗は、微小衝撃函数波の対応の乘積總和を求める事から出發して誘導可能であるから、この相乗 $*$ を衝撃相乗²⁾と呼ぶ事にする。

但し、通常相乗と云へば階段相乗を指し、階段なる文字を附さぬ事とする。

(iii) 基礎定理

$S[0]$ 波振動函数 $u_1(t)$ と $u_2(t)$ の相乗を考へる時

$$u_1(t) * u_2(t) \doteq \frac{\omega}{2} | \dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t) | S[\tan^{-1} \text{Arg } \dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t)] \quad \text{----- (4.1.11)}$$

である。之が最も一般的な包絡演算法の基礎定理である。特別の場合には上の一般形式をもつと簡略化して表す事が出来るが勿論である。通常記法上から

$$\dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t) \doteq \frac{\omega}{2} \{ \dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t) \} S[0] \quad \text{----- (4.1.11)'}$$

と書く。但、 $\dot{u}_1(t)$, $\dot{u}_2(t)$ の表現する内容は包絡ベクトルの規約に従はねばならぬ事に注意する。即

$$\dot{u}_1(t) = u_{11}(t) e^{j\varphi_1(t)}, \quad \dot{u}_2(t) = u_{22}(t) e^{j\varphi_2(t)} \quad \text{----- (4.1.11)''}$$

でなければならぬ。

より精度の高い計算を要する時は、 $\omega/2$ の代りに $(\omega + \Delta\omega)/2$ と置く。

茲に $\Delta\omega$ は

$$\Delta\omega \doteq \left\{ \{ \varphi_1(t) - \varphi_1(0) \} + \{ \varphi_2(t) - \varphi_2(0) \} \right\} / 2t \quad \text{----- (4.1.12)}$$

である。

4.2.2 包絡演算子法の構成

基礎定理を證明する爲に包絡演算子法なる新演算子法を誘導する。其の構成の概要は、先ず $S[0]$ 波 $S[\frac{\pi}{2}]$ 波の各々相乗を計算し、夫等の近似値が一定の整然たる演算法則に従ふ事を示し、其の演算法則が、Heaviside 演算子法に於ける夫と一致する事を示す。次にベクトル演算子法を導入すれば更に簡潔な帰結が得られる事を示す。

1) 其の解説としては例へば、T.V. Kármán: Mathematical Method in Engineering (1940)⁽¹²⁾ 参照

2) 衝撃なる語を使用するのは(4.1.10)が 衝撃函数 $S(t)$ を基準として誘導される演算子法 例へば 桜井氏⁽¹⁹⁾ 及これと同形である。H.W. Droste⁽²⁰⁾, G. Doetsche⁽¹⁴⁾, Stratton⁽¹⁵⁾ 等の用ひた形式から導かれて居るものと同一であるからである。

(i) $S[0]$ 波の相乗

a. $S[0]^{*2} = \{H(t) \sin \omega t\}^{*2}$ の計算
この場合は次の如くなる。

$$S[0]^{*2} = \frac{\omega}{2} t H(t) \sin \omega t = \frac{\omega}{2} t S[0] \quad \text{----- (4.2.1)}$$

b. $S[0]^{*3} = \{H(t) \sin \omega t\}^{*3}$ の計算
この場合は次の如くなる。

$$S[0]^{*3} = \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \frac{t^2}{2} \sqrt{1 + \frac{24}{\omega^2 t^2} + \frac{16}{\omega^4 t^4}} \sin\{\omega t - \varphi(t)\} \quad \text{----- (4.2.2)}$$

$$\varphi(t) = \tan^{-1} \frac{4/\omega t}{1 + 4/\omega^2 t^2} \quad \text{----- (4.2.2')}$$

此處で $\omega t \gg 1$ たりとすれば次の如くなる。

$$S[0]^{*3} \doteq \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \frac{t^2}{2} S[0] \quad \text{----- (4.2.3)}$$

c. $S[0]^{*n} = \{H(t) \sin \omega t\}^{*n}$ の計算
この場合は次の如くなる。

$$S[0]^{*n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} (\omega t)^\lambda \sum_{\nu=0}^{n-\lambda-1} \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \binom{n-\lambda-1}{\nu} \frac{(n+\nu-1)!}{(\lambda+\nu)!} \cos\left(\omega t + \frac{n-\lambda+2\nu}{2}\pi\right) \quad \text{----- (4.2.4)}$$

この級数は指数零順に並べると

$$S[0]^{*n} = A_1 t^{n-1} + A_2 t^{n-2} \quad \text{-----}$$

となる。爰に

$$A_1 = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} \sin \omega t$$

$$A_2 = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4}\right) \cos \omega t$$

規約に依り $\omega t \gg 1$ と取らるべき故

$$\lim_{\omega t \rightarrow \infty} \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu t} = 0$$

となる。即 A_2 以降は A_1 に比し無視する事が可能である。故に

$$S[0]^{*n} \doteq \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} S[0] \quad \text{----- (4.2.5)}$$

なる一般法則が得られる。

若し、

$$S[0]^n = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} S[0] \quad \text{----- (4.2.6)}$$

と書く事にすれば

$$S\{0\}^{*n} \doteq \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} S\{0\}^n \text{ --- (4.2.7)}$$

と書き表される。

(ii) 包絡演算子 s と Heaviside 演算子 p の導入

(4.2.7) 式の関係から、一般に次の法則を得る。

$$S\{0\}^{*n} \doteq \left\{ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)^n \right\} S\{0\}^n \text{ --- (4.2.8)}$$

或は

$$S\{0\}^{*n} \doteq \left\{ \mathcal{H}\left(\frac{1}{p}\right)^n \right\} S\{0\}^n \text{ --- (4.2.8)'}$$

両者の書体を比較すれば、前者の方が自然である。又、包絡函数 $t^\lambda/\lambda!$ 及 $t^\nu/\nu!$ を有する振動函数の相乗を取れば、次の如くなる。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{t^\lambda}{\lambda!} S\{0\} \right\} * \left\{ \frac{t^\nu}{\nu!} S\{0\} \right\} &= \left(\frac{2}{\omega} \right)^\lambda S\{0\}^{*\lambda+1} * \left(\frac{2}{\omega} \right)^\nu S\{0\}^{*\nu+1} \\ &= \frac{\omega}{2} \frac{t^{\lambda+\nu+1}}{(\lambda+\nu+1)!} S\{0\} \end{aligned} \text{ --- (4.2.9)}$$

この関係は s 変換を基礎とする演算子法に従へば、指数法則に關する限り

$$\left\{ \frac{t^\lambda}{\lambda!} S\{0\} \right\} * \left\{ \frac{t^\nu}{\nu!} S\{0\} \right\} = \left\{ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)^{\lambda+\nu+2} \right\} S\{0\}^2 \text{ --- (4.2.10)}$$

$$= \left\{ \mathcal{H}\left(\frac{1}{p}\right)^{\lambda+\nu+1} \right\} S\{0\}^2 \text{ --- (4.2.10)'}$$

に對應する。即對應記号を \Longleftrightarrow 'と書けば

$$\frac{t^\lambda}{\lambda!} S\{0\} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{s}\right)^{\lambda+1} S\{0\} \text{ --- (4.2.11)}$$

或は

$$\frac{t^\lambda}{\lambda!} S\{0\} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{p}\right)^\lambda S\{0\} \text{ --- (4.2.11)'}$$

である。即振動函数の相乗は 演算子 s を以てする乗積の s 変換に相應する事が解る。又演算子 p に依る s 変換を對應さす事は、(4.2.11)'を一見すれば明かな如く、不自然である事が判る。

今若し任意包絡函数 $u_r(t)$ の振動函数があつて、次の如き解折函数で表されるものとする。

$$u_r(t) S\{0\} = \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{r\nu} \frac{t^\nu}{\nu!} \right\} S\{0\} \text{ --- (4.2.12)}$$

($r=1, 2$)

この式の右辺は、結合則、配分則が成立ち、項別和を任意に造る事が可能であるから、

1) 對應記号は一つの演算法則を表すものであつて、Pipes⁽²¹⁾の \doteq 或は Mc Lachlan⁽²²⁾の \supset 等に倣ひ、數りに \Longleftrightarrow を取つたが、其の書体は何んでもあつても良い。

$$u_1(t)S[0] \Longleftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu} \left(\frac{1}{s}\right)^{\nu+1} S[0] = U_1(s)S[0] \quad (4.2.13)$$

となる。而して今 $u_1(t)S[0]$ 及 $u_2(t)S[0]$ なる二種類の振動函数を取り、兩者の相乗を考へる事とする。先づ

$$u_1(t)S[0] * \frac{c_{2\lambda} t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} S[0] = g_\lambda(t)$$

を考へるに $u_1(t)$ は (4.2.13) の級数展開が可能であるから

$$g_\lambda(t) \doteq \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu} \frac{U_1(s)}{s^{\nu+1}} \right\} S[0]^\lambda \quad (4.2.14)$$

である。故に $u_2(t)$ 自身が (4.2.13) の形式で與へられるものとするれば、

$$\begin{aligned} u_1(t)S[0] * u_2(t)S[0] &\doteq \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\lambda} \frac{U_1(s)}{s^{\lambda+1}} \right\} S[0] \\ &= \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\lambda} c_{2\nu} \frac{U_1(s)U_2(s)}{s^{\lambda+\nu+1}} \right\} S[0]^\lambda \\ &\quad (4.2.15) \end{aligned}$$

となる。えより直ちに次の定理を容易に證明する事が出来る。

$$u_1(t)S[0] * u_2(t)S[0] \doteq \{ u_1(t) * u_2(t) \} S[0] \quad (4.2.16)$$

$$= \frac{\omega}{2} \{ u_1(t) * u_2(t) \} S[0] \quad (4.2.16')$$

斯くして包絡演算子法が成立つ事となる。(4.2.13), (4.2.15) の如く働く演算子とは、之を包絡演算子と稱する事とする。

(iii) 包絡ベクトルの導入

前記は、 $S[0]$ 波に関するものであつたが、一般的に $S[\theta]$ 波に對する演算法則を求める爲に、先づ其の準備として單位 $S[0]$ 函数を取り、

$$u_1(t) = S[\theta_1], \quad u_2(t) = S[\theta_2] \quad (4.2.17)$$

とする。 $u_1(t) * u_2(t)$ を造ると、

$$S[\theta_1] * S[\theta_2] = \frac{\omega}{2} t \sin(\omega t + \theta_1 + \theta_2) \quad (4.2.18)$$

を得る。即

$$S[\theta_1] * S[\theta_2] = \frac{\omega}{2} t S[\theta_1 + \theta_2] \quad (4.2.19)$$

を得る。一般函数として、

$$u_\nu(t) = S[\theta_\nu]$$

を取り、えは $\nu=1$ から $\nu=n$ 迄相乗する事を考へる。

$$u_1(t) * u_2(t) * u_3(t) * \cdots * u_n(t) = \prod_{\nu=1}^{*n} S[\theta_\nu] \quad (4.2.20)$$

と書けば、計算の結果次の如くなる。

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} S(\theta_\nu) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\lambda'=1}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda'} (\omega t)^{\lambda'} \sum_{\lambda''=0}^{n-\lambda'-1} \binom{n-\lambda'-1}{\lambda''} \\ \frac{1}{(\lambda'+\lambda'')!} \sum_{\mu'=0}^{\lambda'} \binom{\lambda'}{\mu'} (n+\lambda'-\lambda''-1)! \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda'-\mu'} \\ \cos\left(\omega t + \frac{n-\lambda'+2\lambda''}{2}\pi + \sum_{\nu=1}^n \theta_\nu\right) \\ + \sum_{\mu''=1}^{\lambda''} \sum_{\nu=1}^n \prod_{\sigma'=1}^{\mu''} \sin \varphi_{\sigma'} \left\{ \cos\left(\omega t + \frac{n-\lambda'+2\lambda''}{2}\pi + \sum_{\sigma'=1}^{\mu''} \varphi_{\sigma'}\right) \right\} \quad (4.2.21)$$

但

$$\lambda', \lambda'', \mu', \mu'' = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\varphi_{\sigma'}, \varphi_{\sigma''} = \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots \quad \sigma' \neq \sigma''$$

(一旦 $\varphi_{\sigma'}$ で代表された任意の θ_ν は、再度 $\varphi_{\sigma''}$ で代表されないものとする。)

上式に於て、 $\mu'=0$ のときは $\sum_{\mu''=1}^{\lambda''}$ の項は消失する。以上の級数を t の指数昇順に並べると、

$$B_1 t^{n-1} + B_2 t^{n-2} + \dots$$

後に

$$B_1 = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \sin\left(\omega t + \sum_{\nu=1}^n \theta_\nu\right)$$

$$B_2 = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{(n-2)!} \left\{ (-1) \frac{n-1}{2} \cos\left(\omega t + \sum_{\nu=1}^n \theta_\nu\right) + \frac{n}{4} \cos\left(\omega t + \sum_{\nu=1}^n \theta_\nu\right) + \frac{n}{2} \sum_{\mu=1}^n \sin \theta_\mu \cos\left(\omega t + \sum_{\nu=1}^n \theta_\nu\right) \right\} \quad \mu \neq \nu$$

がある。この最高指数項は $\lambda' = n-1$, $\lambda'' = n-\lambda'-1$ に於て起る。

包絡線演算の規約に従って、 $\omega t \gg 1$ とすれば、一般項に於て、

$$\lim_{\omega t \rightarrow \infty} \frac{B_{2+1}}{B_2 t} = 0$$

となる。従って B_2 以降を省略する事が出来。

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} S(\theta_\nu) \div \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} S\left(\sum_{\nu=1}^n \theta_\nu\right) \quad (4.2.21)$$

となる。即ち $S(\theta_\nu)$ の相乗は、其の剰余角の総和を剰余角とする $S(\theta)$ 演算子法の結果と相等しい。新様な結果から平面ベクトル演算子を適用する基礎が造り得られる。

判へば、 $S[\frac{\pi}{2}]$ 波の相乗は、 $S[\pi]$ 波 即 $-S[0]$ 波となるから、

$$S[\frac{\pi}{2}]^{*2} \doteq -(\frac{\omega}{2}) \{ \mathcal{L}(\frac{1}{5}) \}^2 S[0] \Leftrightarrow \{ \mathcal{L}(\frac{1}{5}) \}^2 S[0]^2 \dots (4.2.23)$$

となり、又

$$S[0] * S[\frac{\pi}{2}] \doteq (\frac{\omega}{2}) \{ \mathcal{L}(\frac{1}{5}) \}^2 S[\frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \{ \mathcal{L}(\frac{1}{5}) \}^2 S[0]^2 \dots (4.2.23)'$$

と置く事が出来る。即

$$S[0] \Leftrightarrow \{ \mathcal{L}(\frac{1}{5}) \} S[0], \quad S[\frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \{ \mathcal{L}(\frac{1}{5}) \} S[0] \dots (4.2.24)$$

なる対応が得られる。斯くして、ベクトル包絡演算法の基礎が成り立った。
即 $S[0]$ 波演算子法の場合と同様に一般に、

$$u_1(t) = u_1(t) S[\varphi_1(t)], \quad u_2(t) = u_2(t) S[\varphi_2(t)]$$

なる時、

$$\begin{aligned} u_1(t) * u_2(t) &= \{ u_1(t) \cos \varphi_1(t) S[0] + u_1(t) \sin \varphi_1(t) S[\frac{\pi}{2}] \} \\ &\quad * \{ u_2(t) \cos \varphi_2(t) S[0] + u_2(t) \sin \varphi_2(t) S[\frac{\pi}{2}] \} \\ &\doteq (\frac{\omega}{2}) \{ \{ u_1(t) \cos \varphi_1(t) * u_2(t) \cos \varphi_2(t) \} S[0]^2 \\ &\quad - u_1(t) \sin \varphi_1(t) * u_2(t) \sin \varphi_2(t) \} \\ &\quad + \{ u_1(t) \cos \varphi_1(t) * u_2(t) \sin \varphi_2(t) \\ &\quad + u_1(t) \sin \varphi_1(t) * u_2(t) \cos \varphi_2(t) \} S[\frac{\pi}{2}] \} \dots (4.2.25) \end{aligned}$$

となるが、これをベクトル演算法で一筆に

$$\dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t) \doteq \{ u_1(t) e^{j\varphi_1(t)} * u_2(t) e^{j\varphi_2(t)} \} S[0]^2 \dots (4.2.26)$$

と書き下す事が出来る。但、 $\dot{u}_1(t)$, $\dot{u}_2(t)$ は $S[0]$ 波ベクトル振動函数を表す。即

$$\dot{u}_1(t) = u_1(t) e^{j\varphi_1(t)} S[0], \quad \dot{u}_2(t) = u_2(t) e^{j\varphi_2(t)} S[0] \dots (4.2.27)$$

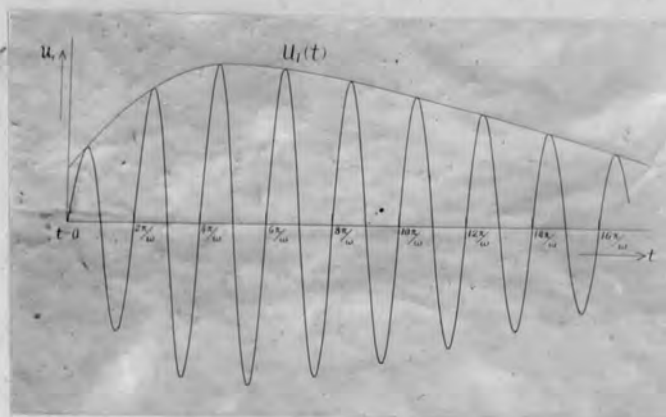
である。茲に厳に注意すべきは、ベクトル振動函数は決して、

$$\dot{u}_1(t) = u(t) \{ \sin \{ \omega t + \varphi(t) \} + j \cos \{ \omega t + \varphi(t) \} \} \dots (4.2.28)$$

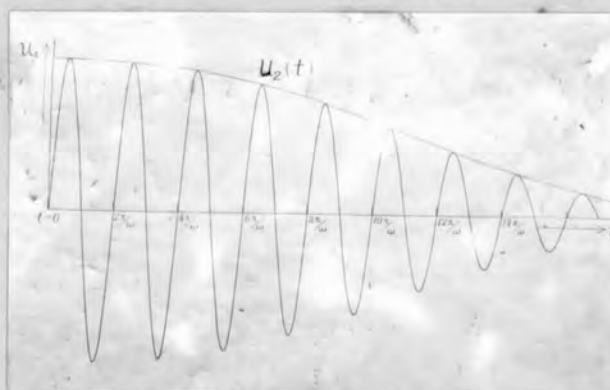
では無い事である。(4.2.27) は飽く迄包絡演算法の規約に従ふ $S[0]$ 波の一形式に過ぎぬから、包絡演算法に規約されない (4.2.28) に発展する事は出来ない。

(4.2.26) を更に一般化して、一般に

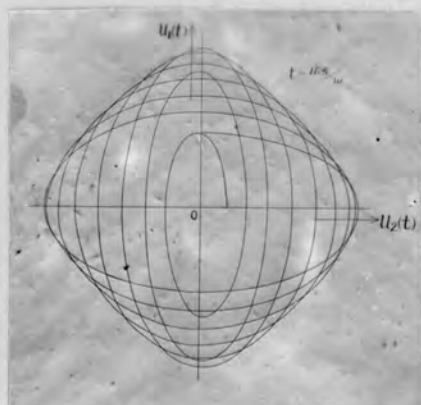
$$\dot{u}_1(t) = \dot{u}_1(t) S[0], \quad \dot{u}_2(t) = \dot{u}_2(t) S[0]$$



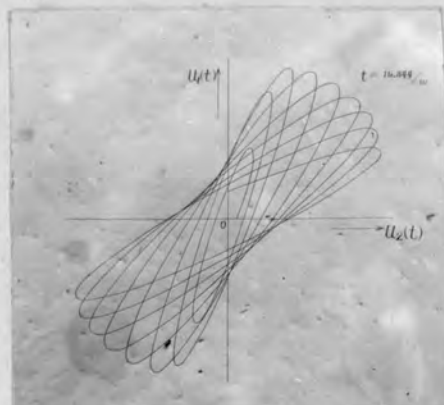
第4.2.1図 [1] 振動函数の一図形 $u_1(t)$



第4.2.1図 [2] 振動函数の一図形 $u_2(t)$



[1] $t = 16.5/\omega$ に於ける図形



[2] $t = 16.844/\omega$ に於ける図形

第4.2.2図 振動函数の相束図形 $u_1(t)$ と $u_2(t)$

なる時は、

$$u_1(t) * u_2(t) \doteq \{ \dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t) \} S[0]^2 \quad (4.2.29)$$

である。又変換を適用して、

$$\mathcal{L} \dot{u}_1(t) = \dot{U}_1(s), \quad \mathcal{L} \dot{u}_2(t) = \dot{U}_2(s)$$

とすれば

$$\dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t) \doteq \{ \mathcal{L} \dot{U}_1(s) \dot{U}_2(s) \} S[0]^2 \quad (4.2.30)$$

となる。相乗した結果の包絡函数は包絡ベクトルの絶対値を取ればよい。

即

$$u_1(t) * u_2(t) \doteq \left(\frac{\omega}{2} \right) | \dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t) | S[\theta(t)] \quad (4.2.31)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1} \frac{\text{Imag} \{ \dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t) \}}{\text{Real} \{ \dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t) \}} \quad (4.2.31')$$

となる。

4.2.3 振動函数の相乗図形と之に依る基礎定理の證明

(i) $S[\theta]$ 波の相乗

現象函数である振動函数

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= u_1(t) \sin(\omega t + \theta_1) \\ u_2(t) &= u_2(t) \sin(\omega t + \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.32)$$

を取り、其の相乗を實際に図形的に施行すれば、例へば第4.2.1圖[1]及び[2]の如き二個の函数では、第4.2.2圖[1]及び[2]の如き相乗図形を形成する。其の形態は密集渦状であつて、 $u_1(t)$ と $u_2(t)$ との間の正規スペクトルの数と、位相角を φ とすれば

$$\varphi = \omega t + \theta_1 + \theta_2 - 2\pi n \quad (4.2.33)$$

の關係にあり、 $\varphi = \pi/2$ にて圖形の面積は最大、 $\varphi = 0, \pi$ に於て圖形の面積は零、即直線状となる。其の旋迴数は $\omega t/2\pi$ で與へられ、之は n に近い数である。 ωt が大であれば旋迴数も大となり渦状は次第に密集して、一巻の圖形は次第に積円化し、 $\omega t \rightarrow \infty$ の極限に於て、完全な積円となる。 $\omega t \rightarrow \infty$ の極限に於て、時刻 $t-\tau$ の相乗圖形が積円となる事を證明する事は容易である。即、今時刻 $t-\tau$ 近傍に於て、 x 軸及 y 軸に之を $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ を取つた時の相乗圖形の坐標は、兩振動函数の正規スペクトルの高さは変化しないから

$$\left. \begin{aligned} x &= u_1(t-\tau) \sin(\omega t - \tau + \theta_1) \\ y &= u_2(t-\tau) \sin(\omega t + \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.34)$$

となる。

正規スペクトル間の相乗角を φ に取つた時 ωt と n の關係は(4.2.33)

で與へられ、之を(4.2.34)に入れると、

$$x/u_1(t-\tau) = -\sin(\omega\tau + \theta_2) \cos\varphi + \cos(\omega\tau + \theta_2) \sin\varphi$$

$$y/u_2(\tau) = \sin(\omega\tau + \theta_2)$$

を得る。兩式より $\omega\tau + \theta_2$ を消去すれば

$$\left\{ \frac{x}{u_1(t-\tau)} \right\}^2 + 2 \left\{ \frac{x}{u_1(t-\tau)} \right\} \left\{ \frac{y}{u_2(\tau)} \right\} \cos\varphi + \left\{ \frac{y}{u_2(\tau)} \right\}^2 = \sin^2\varphi \quad (4.2.35)$$

となる。この二次式の判別条件は

$$\left\{ \frac{1}{u_1(t-\tau)} \right\}^2 \left\{ \frac{1}{u_2(\tau)} \right\}^2 \cos^2\varphi - \left\{ \frac{1}{u_1(t-\tau)} \right\}^2 \left\{ \frac{1}{u_2(\tau)} \right\}^2 < 0 \quad (4.2.36)$$

となるから楕円を表現する。

(4.2.35) の x, y 坐標を $0 \leq 2\psi \leq \pi$ なる範囲の角 ψ だけ正方向に迴転しこの角 ψ を

$$\psi = \tan^{-1} \frac{2u_1(t-\tau)u_2(\tau)}{u_1(t-\tau)^2 + u_2(\tau)^2} \cos\varphi \quad (4.2.37)$$

とする時は、新坐標に就て図形の方程式は

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$$

但

$$A = \frac{\sqrt{2u_1(t-\tau)^3 u_2(\tau)^3} \sin\varphi}{\sqrt{u_1(t-\tau) + u_2(\tau) - \sqrt{[u_1(t-\tau) + u_2(\tau)]^2 - 4u_1(t-\tau)u_2(\tau)} \sin\varphi}}$$

$$B = \frac{\sqrt{2u_1(t-\tau)^3 u_2(\tau)^3} \sin\varphi}{\sqrt{u_1(t-\tau) + u_2(\tau) + \sqrt{[u_1(t-\tau) + u_2(\tau)]^2 - 4u_1(t-\tau)u_2(\tau)} \sin\varphi}} \quad (4.2.38)$$

となり、第4.2.3圖に示す如く、外接矩形に $(\pm u_2(\tau), \pm u_1(t-\tau) \sin\varphi)$ 及 $(\pm u_2(\tau) \sin\varphi, u_1(t-\tau))$ に於て接する。この楕円の面積は

$$\pi AB = \pi u_1(t-\tau) u_2(\tau) \sin\varphi$$

である。この面積は $\varphi = \pi/2$ のとき最大値となり、 $\varphi = 0$ に於て零となる。其の間は正弦的变化を辿る。 φ は t と一次的に開路するから、楕円の面積は t の経過に一次的に開路し正弦的变化をなす。而して、初期面積 $u_1(0)u_2(0)$ 、或は $u_1(t)u_2(0)$ を與へる坐標 $(u_1(0), u_2(t))$ 若くは $(u_1(t), u_2(0))$ より出發し、前者の場合は x 軸に對する。後者の場合は y 軸に對する。総面積を旋迴しつつ、計量して行けば、相乗値 S を得る。出發点より旋迴する総迴轉角は $2\pi n$ より大或は少となるが $2\pi(n \pm \frac{1}{2})$ を超える事は無い。爰に n は前記した如く t 中に含まれる正規スペクトル ω の数である。

故に、

$$\sum_{n=1/2}^{n+1/2} \pi u_1(t-\tau) u_2(\tau) \sin \varphi > S > \sum_{n=1/2}^{n-1/2} \pi u_1(t-\tau) u_2(\tau) \sin \varphi$$

となる。1 ≪ n に於て、S を挟む左右両辺の値は限りなく同一値に接近する。故に今

$$n\pi/t = \omega/2, \quad t/n = \Delta\tau$$

とすれば、

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\omega}{2} \sum_{\tau=0}^{t/\Delta\tau} \pi u_1(t-\tau) u_2(\tau) \Delta\tau \cdot \sin \varphi \\ &= \frac{\omega}{2} \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) \sin \varphi \cdot d\tau \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

を得る。

$$\sin \varphi = \sin(\omega t + \theta_1 + \theta_2)$$

なるを以て、結局 (4.2.39) 式は、前節に記した (4.1.11) 式に外ならない。即

$$u_1(t) \beta[\theta_1] * u_2(t) \beta[\theta_2] \doteq \frac{\omega}{2} \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) d\tau \cdot S[\theta_1 + \theta_2] \quad (4.2.39)'$$

なる演算法則を得る。

(ii) $\beta[\varphi(t)]$ 波の相乗

振動函数として、

$$u_1(t) = u_1(t) \sin(\omega t + \varphi_1(t))$$

$$u_2(t) = u_2(t) \sin(\omega t + \varphi_2(t))$$

を取る。正規スペクトル間には相差角 φ を設けて造った $u_1(t)$ と $u_2(t)$ の相乗図形は、やはり密集楕円となるのは明かであるが、其の総廻角及総廻図形の面積は、 $\varphi_1(t)$ と $\varphi_2(t)$ に大なる関係を持つ。

今、任意時刻 t に於て、剰余角が占める角周函数を $\zeta_\varphi(t, \tau)$ とすれば

$$\zeta_\varphi(t, \tau) = \varphi_1'(t-\tau) + \varphi_2'(\tau)$$

である。 ζ_φ/ω なる角周函数の偏倚に依つて、楕円状相乗図形は、其の軸が廻転し、相乗図形の面積を計量する総廻角が増減する。この増減は (4.2.33) の関係式に依つて定まる。同式より φ と ψ の関係を見るに、前者の $2\pi\psi$ の変化が、後者の $\pi\psi$ の変化に對應する。故に相乗図形の総廻角を $(\omega + \Delta\omega)t$ とすれば

$$\begin{aligned} (\Delta\omega)t &= \frac{1}{2} \int_0^t \zeta_\varphi(t, \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \{ \varphi_1'(t) + \varphi_2'(t) \} \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

但

$$\tilde{v}_1'(t) = v_1'(t) - v_1'(0), \quad \tilde{v}_2'(t) = v_2'(t) - v_2'(0)$$

である。

次に正規スペクトル位置より φ 移動した位置に於ける相乗図形の一旋迴面積は、振幅スペクトルの関係位相角が $\tilde{v}_1'(t-\tau) + \tilde{v}_2'(\tau) + \varphi$ となるを以て

$$\pi u_1(t-\tau) u_2(\tau) \sin[\tilde{v}_1'(t-\tau) + \tilde{v}_2'(\tau) + \varphi]$$

である。積分の旋迴数は、 $n + \zeta\varphi/2\pi$ であつて、 $\zeta\varphi/2\pi$ に最も近い整数を Δn とすれば

$$\begin{aligned} & \pi \sum_{n+\Delta n+1/2}^{n+\Delta n+1/2} u_1(t-\tau) u_2(\tau) \sin[\tilde{v}_1'(t-\tau) + \tilde{v}_2'(\tau) + \varphi] \Delta \tau \\ & > S > \pi \sum_{n+\Delta n-1/2}^{n+\Delta n-1/2} u_1(t-\tau) u_2(\tau) \sin[\tilde{v}_1'(t-\tau) + \tilde{v}_2'(\tau) + \varphi] \Delta \tau \end{aligned}$$

である。 $n \rightarrow \infty$ とすれば、両辺の値は次第に接近し、極限に於て、

$$S = \frac{\omega + \Delta\omega}{2} \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) \sin[\tilde{v}_1'(t-\tau) + \tilde{v}_2'(\tau) + \varphi] d\tau \quad (4.2.41)$$

$$\Delta\omega \doteq \frac{\tilde{v}_1'(t) + \tilde{v}_2'(t)}{2t} \quad (4.2.41)'$$

となる。 $\Delta\omega \ll \omega$ であるから、 $\Delta\omega$ は省略してもよいのであるが、実際の計算が ω を有限としてゐる近似算であるから、之を算入して近似度を高とせしめた方がよい事がある。(4.2.41)に見る如き結果は、包絡線算子法では誇張する事が出来なかつた、一層精度の高い関係式である。

換て、相乗値 S は、前述の S (同波相乗の場合) と異り、 φ を $\pi/2$ に撰んでも、必ずしも振幅スペクトルを與へない事は明白である。故にこのスペクトルの振幅位位置を定める爲に S を最大ならしめる條件を導出せねばならない。この爲 (4.2.41) を展開すれば

$$\begin{aligned} S &= \frac{\omega + \Delta\omega}{2} \left[\int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) \sin[\tilde{v}_1'(t-\tau) + \tilde{v}_2'(\tau)] d\tau \cdot \cos\varphi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) \cos[\tilde{v}_1'(t-\tau) + \tilde{v}_2'(\tau)] d\tau \cdot \sin\varphi \right] \\ &\equiv a(t) \cos\varphi + b(t) \sin\varphi \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

となる。従つて S を最大ならしめる相乗角 $\varphi = \varphi_m$ は次の如くなる。

$$\varphi_m = \tan^{-1} \frac{b(t)}{a(t)} \pm 2\pi m \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$m=0$ に取るべきは云ふ迄もない。この場合の振幅スペクトルの振幅即ち

包絡函数の値は

$$u(t) = \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2} \quad \text{--- (4.2.43)}$$

となり、相乗値自体は

$$S = \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2} \sin \left[\tan^{-1} \frac{a(t)}{b(t)} + \varphi \right] \quad \text{--- (4.2.43)'}$$

となつて、 φ に従ひ正弦的に変化する。即ちやはり振動函数となる。振動函数は正角周波数 $\omega/2\pi$ で規定せねばならぬから

$$\varphi = \omega t + \psi_1(0) + \psi_2(0) - 2\pi n$$

に還元する事を要する。故に結局

$$\varphi_m = \tilde{\psi}(t)$$

と置けば、相乗値は $S[\tilde{\psi}(t)]$ 波に分類される形式となる事が判る。

$$\sin \varphi = \sin [\omega t + \psi_1(0) + \psi_2(0)]$$

なるを以て、

$$\begin{aligned} & u_1(t) S[\tilde{\psi}_1(t)] * u_2(t) S[\tilde{\psi}_2(t)] \\ & \doteq \frac{\omega + \Delta\omega}{2} \left[\int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) \sin[\tilde{\psi}_1(t-\tau) + \tilde{\psi}_2(\tau)] d\tau \right. \\ & \quad \cdot S\left[\frac{\pi}{2} + \psi_1(0) + \psi_2(0)\right] \\ & \quad \left. + \int_0^t u_1(t-\tau) u_2(\tau) \cos[\tilde{\psi}_1(t-\tau) + \tilde{\psi}_2(\tau)] d\tau \right. \\ & \quad \left. \cdot S[\psi_1(0) + \psi_2(0)] \right] \quad \text{--- (4.2.44)} \end{aligned}$$

なる演算原理が成立する。之を分解し衝撃相乗記号 $*$ を使用すれば、包絡演算子法で得られた處のものと全く類似した結果が得られる。即

$$\begin{aligned} u_1(t) * u_2(t) & \doteq \frac{\omega + \Delta\omega}{2} \\ & \cdot \left\{ u_1(t) \cos \tilde{\psi}_1(t) * u_2(t) \cos \tilde{\psi}_2(t) - u_1(t) \sin \tilde{\psi}_1(t) * u_2(t) \sin \tilde{\psi}_2(t) \right. \\ & \quad \cdot S[\psi_1(0) + \psi_2(0)] \\ & \quad \left. + \left[u_1(t) \cos \tilde{\psi}_1(t) * u_2(t) \sin \tilde{\psi}_2(t) + u_1(t) \sin \tilde{\psi}_1(t) * u_2(t) \cos \tilde{\psi}_2(t) \right] \right. \\ & \quad \left. \cdot S\left[\frac{\pi}{2} + \psi_1(0) + \psi_2(0)\right] \right\} \quad \text{--- (4.2.45)} \end{aligned}$$

となる。之は一見 (4.2.25) 式と比して相異なるかの如く見えるが、実質的内容は全く同一のものである。若しベクトル演算法に依れば

$$S[\psi_1(0) + \psi_2(0)] = e^{j[\psi_1(0) + \psi_2(0)]} S[0]$$

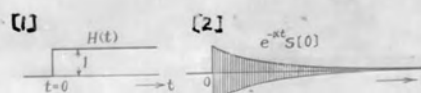
として表現が容易、且 $\psi_1(0), \psi_2(0)$ は定数であるから、

$$\tilde{\psi}_1(t) + \psi_1(0) = \psi_1(t), \quad \tilde{\psi}_2(t) + \psi_2(0) = \psi_2(t)$$

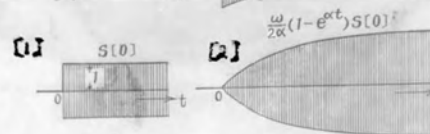
に還元すれば、ベクトル記法に依り一挙に

0032

第4.2.4图



第4.2.5图



$$\tilde{u}_1(t) * \tilde{u}_2(t) \doteq \frac{\omega + \Delta\omega}{2} \left\{ u_1(t) \varepsilon^{j\omega_1(t)} * u_2(t) \varepsilon^{j\omega_2(t)} \right\} S[0] \quad (4.2.46)$$

を得る。この式が(4.2.26)式と異なるのは、係数 $\omega/2$ が $(\omega + \Delta\omega)/2$ に取られて居る点だけである。前に記した如く $\Delta\omega \ll \omega$ なる故、 $\Delta\omega \rightarrow 0$ と取ってよいのであるが、より精度の高い結果を求める場合には、 $\Delta\omega$ を消失せしめない方がよい。何れにせよ包絡演算子法に依つても、時内函数の相乗図形からしても、共に同一演算法則を収め得る事は、この演算法が如何に完全であるかを證左するものであらう。

一般に $\tilde{u}_1(t)$ 、 $\tilde{u}_2(t)$ が

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t) &= \dot{u}_1(t) S[0] = \sqrt{u_{r1}(t)^2 + u_{i1}(t)^2} \varepsilon^{j \tan^{-1} \frac{u_{i1}(t)}{u_{r1}(t)}} S[0] \\ \tilde{u}_2(t) &= \dot{u}_2(t) S[0] = \sqrt{u_{r2}(t)^2 + u_{i2}(t)^2} \varepsilon^{j \tan^{-1} \frac{u_{i2}(t)}{u_{r2}(t)}} S[0] \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

と表される時は

$$\tilde{u}_1(t) * \tilde{u}_2(t) \doteq \frac{\omega + \Delta\omega}{2} \left\{ \dot{u}_1(t) * \dot{u}_2(t) \right\} \cdot S[0] \quad (4.2.48)$$

なる演算法則を造る事が出来る。

4.2.4 励振固有波函数の導入

Laplace 変換を基底とする演算子法から、次の定理を導くのは容易である。

$$\begin{aligned} \text{但} \quad u_1(t) * u_2(t) * \dots * u_n(t) &= u_1(t) * \tilde{u}_2(t) * \tilde{u}_3(t) * \dots * \tilde{u}_n(t) \\ \tilde{u}_v(t) &= \int_0^t u_v(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

一般に衝撃相乗 $*$ よりも、階段相乗 $*$ の方が実数計算を行う事が遙かに容易であるから、宜しく包絡演算法も、この形式に変形すべきである。

而して、振動函数 $u(t)$ の包絡函数 $\tilde{u}(t)$ を積分する形式は、単位 $S[0]$ 函数を $u(t)$ に相乗した形式と同等である。即

$$\tilde{u}(t) S[0] = \int_0^t u(\tau) d\tau \cdot S[0] = \frac{2}{\omega} \left\{ S[0] * u(t) \right\}$$

となる。後の便を考へ、 $\omega/2 \tilde{u}(t) S[0]$ を励振固有波函数と名付け、基準固有波函数は $u(t) S[0]$ であると稱する事とする。一つの振動系に於ける基準欠励振固有波の物理的意味は次の如くである。

即、第4.2.4圖[1]に表される如き駆動力 $H(t)$ が振動系に加へられた時、其の振動系の應動が第4.2.4圖[2]の如く例へば $\varepsilon^{-\alpha t} S[0]$ となつたとすれば、之が基準固有波を表す。一方若し其の駆動力が第4.2.5圖[1]の如き $S[0]$ 波に代れば、振動系の應動波は第4.2.5圖[2]の如く $\omega/2\alpha (1 - \varepsilon^{-\alpha t}) S[0]$ となる。之が励振固有波である。而して本例に於ける $\omega/2\alpha$

なる値は振動系の「良度」¹⁾と呼ばれるものと数値的に一致する。

励振固有波函数を表す場合には、 $\tilde{u}(t)$ なる記号を使う事とする。即

$$\tilde{u}(t) = \frac{\omega}{2} \hat{u}(t) S[0] = \hat{u}(t) S[0]^2 \quad \text{-----} (4.2.50)$$

である。励振固有波の包絡函数を使用すれば、包絡演算法の基礎定理は、次の如く変形出来る。

$$u_1(t) * u_2(t) * \dots * u_n(t) = \left\{ u_1(t) * \frac{\omega}{2} \tilde{u}_2(t) * \dots * \frac{\omega}{2} \tilde{u}_n(t) \right\} S[0] \quad \text{-----} (4.2.51)$$

(4.1.1) 式の形は、基礎定理として、形式的に美しいが、実際計算の上からは (4.2.51) 式の形式に値する方が遙かに便利である。其の消息は次に述べる Q 函数の導入に依り明白となる。

尚励振固有波は、包絡演算法に於ては、單に s を p に変換した形式で成り得る事を注意する。即

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(s) S[0] ds$$

ならば

$$\tilde{u}(t) = \frac{\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U(p) S[0] dp \quad \text{-----} (4.2.52)$$

である。

4.2.5 包絡演算法の対象となる固有波函数。

(4.2.51) 式に於て、 $u_1(t)$ を駆動力の包絡函数、 $u_2(t)$ 以下を受動振動系の基準固有波函数の包絡函数とすれば、同式は物理的に整然たる形を備へて居る事が判る。

振動系が電気回路であつて、且集中定数回路であるならば、基準固有波函数 $f(t)$ は、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{N(p)}{M(p)} \frac{e^{pt}}{p} dp \quad \text{-----} (4.2.53)$$

で與へられる。但 $M(p)$ 及 $N(p)$ はそれぞれ m 次及 n 次の有理整函数とする。回路論上 $m \leq n+1$ の範囲を取扱ふものとすれば、 $N(p)/pM(p)$ の特異点として存在し得るものは、 $pM(p)=0$ の根に於て、次の五種類しかない。

- (a) 原点上の零根
- (b) 実根
- (c) 同じ重根
- (d) 共軛複素根一対
- (e) 同じ重根

¹⁾ 良度 (Quality) は、共振角周波数が ω なる、 R, L, C 単振動系では約 $\omega L/R$ であり、普通この値を Q で表してゐるが、本論文では g を以て表す。

故に $f(t)$ の一般形式は次の形以外には無い。

$$f(t) = AS(t) + \left\{ B + \sum C_\nu E^{-\gamma_\nu t} + \sum D_\nu t E^{-\delta_\nu t} + \dots \right. \\ + \sum F_\nu E^{-\alpha_\nu t} \sin(\omega + \alpha_\nu t + \theta_\nu) \\ + \sum G_\lambda t E^{-\beta_\lambda t} \sin(\omega + \alpha_\lambda t + \theta_\lambda) + \dots \left. \right\} \\ \cdot H(t) \quad \text{--- (4.2.54)}$$

この $f(t)$ を $S[0]$ 波で励振して、励振固有波を求めれば次の如くなる。

(i) $AS(t)$ の場合、

$$S[0] * AS(t) = \omega AS\left[\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{--- (4.2.55)}$$

(ii) $BH(t)$ の場合

$$S[0] * B \cdot H(t) = BS[0] \quad \text{--- (4.2.56)}$$

(iii) $C_\nu E^{-\gamma_\nu t}$ の場合

$$S[0] * C_\nu E^{-\gamma_\nu t} H(t) = C_\nu \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\delta_\nu^2 + \omega^2}} S\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega}{\delta_\nu}\right] - \frac{\omega \gamma_\nu}{\delta_\nu^2 + \omega^2} E^{-\gamma_\nu t} H(t) \right\} \\ \text{--- (4.2.57)}$$

(iv) $D_\nu t E^{-\delta_\nu t}$ の場合

$$S[0] * D_\nu t E^{-\delta_\nu t} = D_\nu \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\delta_\nu^2 + \omega^2}} S\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega}{\delta_\nu}\right] \right. \\ \left. + \frac{\omega}{\delta_\nu^2 + \omega^2} \left\{ \frac{\omega^2 - \delta_\nu^2}{\delta_\nu^2 + \omega^2} E^{-\delta_\nu t} - \delta_\nu t E^{-\delta_\nu t} \right\} H(t) \right\} \\ \text{--- (4.2.58)}$$

(v) $F_\nu E^{-\alpha_\nu t} S[\alpha_\nu t + \theta_\nu]$ の場合

$$S[0] * F_\nu E^{-\alpha_\nu t} S[\alpha_\nu t + \theta_\nu] \doteq \frac{\omega}{2} F_\nu \frac{1}{\sqrt{\alpha_\nu^2 + \omega^2}} \sqrt{1 - 2E^{-\alpha_\nu t} \cos \alpha_\nu t + E^{-2\alpha_\nu t}} \\ \cdot S\left[\theta_\nu + \tan^{-1} \frac{\alpha_\nu}{\omega} - \psi_\nu(t)\right] \\ \psi_\nu(t) = \tan^{-1} \frac{E^{-\alpha_\nu t} \sin \alpha_\nu t}{1 - E^{-\alpha_\nu t} \cos \alpha_\nu t} \quad \text{--- (4.2.59)}$$

(vi) $G_\lambda t^\nu E^{-\beta_\lambda t} S[\theta_\lambda]$ の場合

$$S[0] * G_\lambda t^\nu E^{-\beta_\lambda t} S[\theta_\lambda] \doteq \frac{\omega}{2} G_\lambda \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta_\lambda^2 + \omega^2}} \right\}^{\nu+1} \\ \cdot \sqrt{f_r(t)^2 + f_i(t)^2} S\left[\theta_\lambda + \nu+1 \tan^{-1} \frac{\omega}{\beta_\lambda} - \tan^{-1} \frac{f_i(t)}{f_r(t)}\right] \\ f_r(t) = \nu! - \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!} \left\{ \frac{t}{\sqrt{\beta_\lambda^2 + \omega^2}} \right\}^{\nu-\mu} E^{-\beta_\lambda t} \cos(\alpha_\lambda t + \nu-\mu \tan^{-1} \frac{\omega}{\beta_\lambda}) \quad \text{--- (4.2.60)} \\ f_i(t) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!} \left\{ \frac{t}{\sqrt{\beta_\lambda^2 + \omega^2}} \right\}^{\nu-\mu} E^{-\beta_\lambda t} \sin(\alpha_\lambda t + \nu-\mu \tan^{-1} \frac{\omega}{\beta_\lambda}) \\ \text{--- (4.2.60)'} \\ \text{--- (4.2.60)'}$$

となる。以上を通覧するに、包絡線等法の規約 $1 \ll \omega t$ に依り、閉路が

可能な項は (ii), (iii) 及 (iv) の三項に對するもので、之等はどれも基準固有波は非振動形となつてゐる。之以外のものは、どれも値が ω に對し一次的に對應するから、どれも包絡演算法の對象となり得る。結局基準固有波函数の中で、 $S(t)$ 及 $S[\omega t]$ 函数が包絡演算法の對象となり得る結論となる。

4.2.6 $Q_n(\zeta, \omega)$ 及 $A(\zeta, \omega)$ 函数の導入

通常取扱ふ高周波多段増幅器等の集中定数過渡現象を論ずる場合、回路系の微分方程式或は演算子函数式を解いて、結局求められるものは、前記した如き数種の形式に過ぎない。夫故極め固有波函数を豫想し、一定の公式化した形式で、勵振固有波を見出して置くならば、之を基礎として、種々の問題の解答が求められる事になる。

筆者の卓見に依れば、振幅衰減波を取扱う場合は、基準固有波函数は $e^{-\alpha t} S[\omega t]$ の形式一種類で充分であると考へる。本形式を用ふれば“普通取扱ふ處の如何なる問題も”と記函数の加減乗法の組合せに帰着出来るからである。今 $e^{-\alpha t} S[\omega t]$ 波の勵振固有波をベクトル記法で求めれば次の如くなる。

$$S[\omega t] * e^{-(\alpha - j\omega)t} S[\omega t] \doteq \frac{\omega + \Delta\omega}{2\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \{1 - e^{-(\alpha - j\omega)t}\} S[\tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}]$$

$$\Delta\omega = \omega/2 \quad \text{--- (4.2.61)'}$$

上式は (4.2.46) 式に従ひ、包絡演算子法に依れば $S[\omega t]^2$ に對應する係数として、 $\omega/2 S[\omega t]$ を取るべき處を、之を採らずして、 $(\omega + \Delta\omega)/2 S[\omega t]$ を取つて、計算式の精密化を圖つたものである。

次に記法を簡潔ならしむる爲

$$\omega/\alpha \equiv \zeta, \quad \alpha t \equiv \tau, \quad \omega/\alpha \equiv \eta \quad \text{--- (4.2.62)}$$

と書き次の如き函数を定義する。

$$\dot{Q}_1(\zeta, \tau) = \{1 - e^{-(1-j\zeta)\tau}\} H(\tau) \quad \text{--- (4.2.63)}$$

同様の形式で一般に

$$\begin{aligned} \dot{Q}_n(\zeta, \tau) &= \dot{Q}_1(\zeta, \tau)^{*n} \\ &= \{1 - e^{-(1-j\zeta)\tau} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(1-j\zeta)^v \tau^v}{v!}\} H(\tau) \end{aligned} \quad \text{--- (4.2.64)}$$

を定義する。次に振幅函数とも名付くべき $A(\zeta, \eta)$ は、

$$A(\zeta, \eta) = \frac{\eta + 5/4}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \quad \text{--- (4.2.65)}$$

を定義すれば、一般に $\varepsilon^{-(\alpha-j\omega)t} S[0]$ の n 相乗に対する過渡固有値は

$$S[0] * \left\{ \varepsilon^{-(1-j\zeta)\zeta} S[0] \right\}^{*n} = A(\zeta, \eta)^n \dot{Q}_n(\zeta, \eta) S[n \tan^{-1} \zeta] \quad (4.2.66)$$

となる。上式は同一良度、同一同調周波数の単同調 n 段高周波増幅器の基準周波数駆動力に対する増幅特性を表して居る。又

$$S[0] * \prod_{v=1}^{*n} \left\{ \varepsilon^{-(1-j\zeta_v)\zeta_v} S[0] \right\} = \prod_{v=1}^{\eta=n} A(\zeta_v, \eta_v) \cdot \prod_{v=1}^{\eta=n} \dot{Q}_v(\zeta_v, \eta_v) \cdot S\left[\sum_{v=1}^{\eta} \tan^{-1} \zeta_v\right] \quad (4.2.67)$$

$$\eta_v = \frac{\omega_v}{\alpha}, \quad \zeta_v = \alpha t$$

なる公式も得る。上式は各種良度 η_v 、離調同調、 n 段高周波増幅器の基準周波数駆動力に対する過渡増幅特性を表して居る。

新函数 $\dot{Q}_n(\zeta, \eta)$ の性質は、其の圖表は附録 II に添付する事とするが、其の定義形を一括すると次の如くである。

$$Q_n(\zeta, \eta) = |\dot{Q}_n(\zeta, \eta)| \quad (4.2.68)$$

$$\dot{Q}_n(\zeta, \eta) = R_n(\zeta, \eta) - j W_n(\zeta, \eta) \quad (4.2.69)$$

$$R_n(\zeta, \eta) = 1 - \varepsilon^{-\eta} \cos \zeta \eta - (1+\zeta^2)^{\frac{\eta}{2}} \zeta \cos(\zeta \eta - \tan^{-1} \zeta) - \frac{(1+\zeta^2)}{2} \zeta \cos(\zeta \eta - 2 \tan^{-1} \zeta) - \dots - \frac{(1+\zeta^2)^{\frac{\eta}{2}}}{\eta!} \zeta \cos(\zeta \eta - \eta \tan^{-1} \zeta) \quad (4.2.70)$$

$$W_n(\zeta, \eta) = \varepsilon^{-\eta} \sin \zeta \eta + (1+\zeta^2)^{\frac{\eta}{2}} \zeta \sin(\zeta \eta - \tan^{-1} \zeta) + \frac{(1+\zeta^2)}{2} \zeta \sin(\zeta \eta - 2 \tan^{-1} \zeta) + \dots + \frac{(1+\zeta^2)^{\frac{\eta}{2}}}{\eta!} \zeta \sin(\zeta \eta - \eta \tan^{-1} \zeta) \quad (4.2.70)'$$

其の性質として、

$$\dot{Q}_n(\zeta, \eta) = \bar{Q}_n(-\zeta, \eta) \quad (4.2.71)$$

$$R_n(\zeta, \eta) = R_n(-\zeta, \eta) \quad (4.2.72)$$

$$W_n(\zeta, \eta) = -W_n(-\zeta, \eta) \quad (4.2.73)$$

$$\dot{Q}_n(\zeta, \eta) * \dot{Q}_n(-\zeta, \eta) = R_n(\zeta, \eta)^{*2} + W_n(\zeta, \eta)^{*2} \quad (4.2.74)$$

等のものである。

実用上使用を便ならしめる爲、良度 η 、離調度 α 、周波数 f を設け次の如く定める。

$$\eta \equiv \omega / 2\alpha, \quad \alpha \equiv \Omega / \omega, \quad f \equiv \omega / 2\pi$$

然る時は

$$\xi = \eta/2, \quad \eta = \pi f t / q$$

である。

$Q_n(\xi, \eta)$ 函数及 $A(\xi, \eta)$ 函数を利用すれば、多段高周波増幅回路の過渡増幅特性が如何に簡潔に處理し得るかと言ふ事は贅言を要しない。高周波増幅回路一般の過渡的特性は、数個の Q 函数の和を以て完全に表現せられ、其の段及次段の回路が離調或は同調何れの状態であつても、最終の増幅特性は、各段 Q 函数の和集で簡潔に表現されるのである。

4.2.6 周期音波の増幅系曲の实例計算

$A(\xi, \eta)$ なる函数の集積は、 ξ を変数として表す時、普通取扱はれる處の同調回路の周波帯域特性を表して居る。

今、中周波増幅器等に於て、其の周波帯域特性を覆ふ様な同調帯域を持つた振幅変調波の増幅系曲を考へる。其の過渡増幅特性を表す勵振同調函数を $\varphi(t)$ とすれば、之は Q 函数と $A(\xi, \eta)$ 函数の數個の集積で表現可能である。他方入力波の包絡函数を $v_0(t)$ とすれば、増幅系 $v(t)$ の特性は

$$v(t) = v_0(t) * \varphi(t) \quad \text{--- (4.2.75)}$$

である。若し $v_0(t)$ が独立波で無く、周期函数である時に、定常的現象を問題とする時は、相集計算の實施には特別な考慮を要する。今斯かる場合の周期を T 、一周期内の $v_0(t)$ の函数的滴長を $\bar{v}_0(t)$ とすれば、 $-\infty < t < \infty$ 領域に於ける定常的な $v_0(t)$ の表式は

$$v_0(t) = \bar{v}_0(t) * \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} H(t-T)^{* \nu} \quad \text{--- (4.2.76)}$$

である。内題とする時刻を $t < T$ に限定すれば

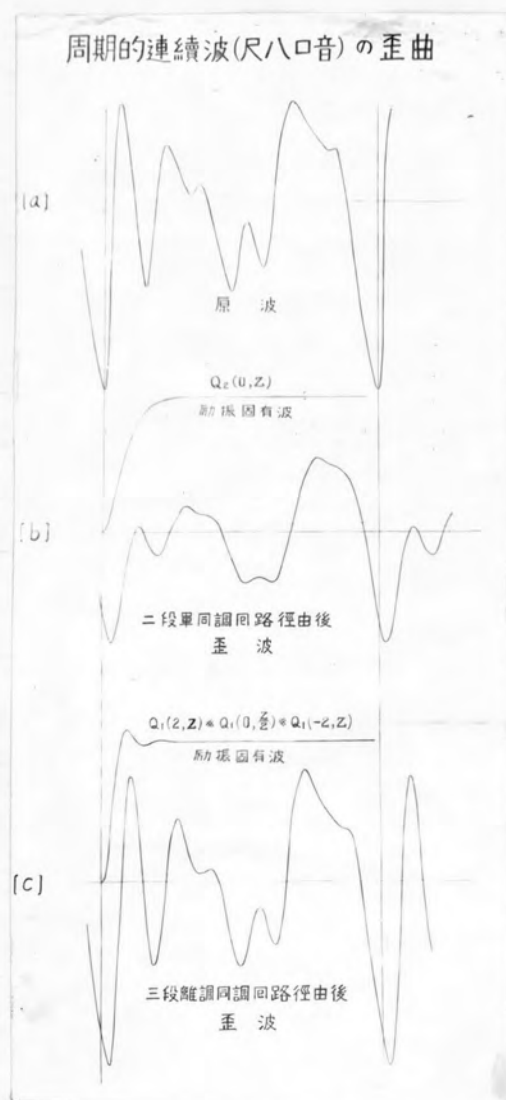
$$\begin{aligned} v_0(t) &= \bar{v}_0(t) * \frac{H(t)}{H(t) - H(t-T)} \\ &\equiv \bar{v}_0(t) * \pi(t, T) \quad \text{--- (4.2.77)} \end{aligned}$$

$$\pi(t, T) = \sum_{\nu=-\infty}^0 H(t-T)^{* \nu} \quad \text{--- (4.2.78)}$$

として表される。斯様にする時増幅系曲は、二種類の形式で算定される。

$$v(t) = \{ \bar{v}_0(t) * \varphi(t) \} * \{ \pi(t, T) \} \quad \text{--- (4.2.79)}$$

$$= \{ \bar{v}_0(t) \} * \{ \varphi(t) * \pi(t, T) \} \quad \text{--- (4.2.80)}$$



第 4・2・6 圖

以上の計算操作を言葉で満足すると、(4.2.79)は一周期波 $\bar{v}(t)$ と $v(t)$ を相乗し、其の相乗値に於て $t = \frac{1}{2}T$ の値を、累積的に相加すれば $v(t)$ が求められる事を示して居り、(4.2.80)は之と逆に $v(t)$ の $t = \frac{1}{2}T$ に於ける値を相加し、後は一種の基中の特性函数を導、其の函数と一周期波 $\bar{v}(t)$ とを相乗すれば、 $v(t)$ が得られる事を示す。兩者何れの手法を取つても一周期内の相乗計算で、所望の結果を求められる事を示して居る。兩者を比較するに、(4.2.80)は $f(t)$ の定常値が変となる場合に使用して便利であり、増定数が T に比し最大である場合とか、同様の特性函数を確定して置くが、計算と有利と見られる場合等には、同方式を使用するがよい。(4.2.79)式は $v(t)$ の定常値が、定数となる場合に使用して便利である。

次に例題的計算として、凡ハは音にて振幅変調を受けた振動波が単同調二級高周波増幅器の特性、及び三級調高周波増幅器の特性を經由する二種類の場合約の波形を求めらる事とする。

第4.2.6図は、凡ハが凡ハは音の原波であつて、基本波周波数は $420\text{V}/\text{s}$ であるが、今の場合約を一般的に表し、搬送波周波数 f に對し f_c/f の比を持つものとする。原波周波数の同期 $1/f_c$ を時間軸の基準に取り、之を T とする。増幅特性を表す Q 函数の調波数を適宜に設定して、 $\omega = 10$ を原波の一周期 T に等しく選ぶ。 q と f_c/f の二者相互的には、この時

$$q = 0.314 f/f_c \quad \text{又は} \quad f/f_c = 3.18 q$$

の關係を生ずる。故に例へば $q = 131$ の場合は $f/f_c = 417$ となり、 $f_c = 420\text{V}$ に於ては、 $f = 175\text{KHz}$ に相應する。

同一高度單同調二級増幅器の振幅固有波は $Q_1(\zeta, \omega) \approx Q_2(\zeta, \omega) = Q_2(\zeta, \omega)$ にて過渡特性が表される。其の振幅特性、即周波帯域特性は $A(\zeta, \omega)^2$ である事は言ふ迄もない。今、 $\zeta = 0$ なる同調波にて駆動されるものとし、第4.2.6図[2]に $Q_2(0, \omega)$ の形狀を描き、同時に之を原波に相乗して歪曲波を求め、同圖に指示した。求む法は(4.2.79)の方式に據つた。因より判明する如く、原波は著しく意味を帯び且位相が移動されたものに變形して増幅される事が明白となる。

第4.2.6図[3]は同様の計算であるが、三級調高周波單同調増幅器に對し求めたもので、この際其の調波度は二級が $\zeta = \pm 1$ に取られ、一級が中心周波数に同調して居るものであつて、且、中心周波数に同調して居るもの、高度 q の $1/2$ に取られた場合である。其の過渡特性は

1) 小幡重一：岩波物理実験学 巻 音響第 336⁽²²⁾ より引用。

励振固有波 $Q_1(2, 2) \neq Q_1(0, 2/2) \neq Q_1(-2, 2)$ を有する。一予振幅特性、即ち周波数特性は、 ζ_x を変数とすれば、 $A(\zeta_x + 2, 8) \cdot A(\zeta_x, 8/2) \cdot A(\zeta_x - 2, 8)$ で與へられる。励振固有波の形状を計算した結果 同図(3) に記入した如き波形を得る。之を原波に相乗し歪曲波を求め同時に描示した。この場合の歪曲は、原波の尖鋭な屈曲が強調される如く現れ、同時に位相の移動を起す事が知れる。

以上の適用計算は、包絡演算法の緒に位するものに過ぎないが、良質音の搬送及増幅等の諸設計に示唆する處頗る深く、且筆者の能う限り、終末迄展して居なかつた新境地を開く計算である。

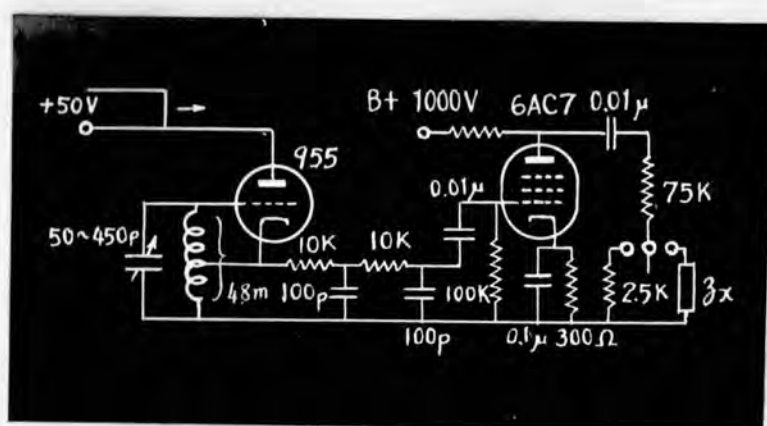
4.3 インデイヤル・インピーダンス測定法の適用

4.3.1 原理

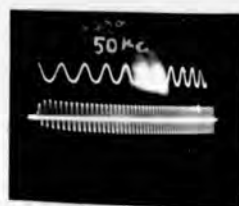
包絡演算法の基礎定理の誘導に當つて、基準固有波函数はインデイヤル諸定数に匹敵する事を述べたが、この事柄は頗る重要である。尤も高周波増幅器の過渡現象を取扱う場合には、理論と真空管を強制電流源に置換する事が可能であるから、アドミタンス定数は不要であつて、インデイヤル・インピーダンス及インデイヤル伝達インピーダンス、この二者を基本として、殆んど全ての回路計算を盡す事が出来る。一旦振動系の基準固有波を測定すれば、包絡函数を積分して、其の励振固有波が得られる。斯くして、包絡演算法を觀測函数を基として進展させる事が出来るのである。事実前記の Q 函数は、先驗的等価回路の存在を基本として誘導されたものであるから、實際の回路に於て、基準固有波乃至励振固有波が果して Q 函数形に従ふか否かも疑問である。殊に副振動乃至寄生振動を派生する如き構造の線路に於ては、構造より決定した等価回路を輕率に用ひ、且之に信頼する事は成りねばならぬ事である。此處に於て、觀測函数に信頼すれば、最も確實な根據を以て、包絡演算及諸検討を行ふ事が可能となり、インデイヤル・インピーダンス測定法の適用も爰に成就される事となるのである。

4.3.2 励振固有波函数の測定。

單位函数 $H(t)$ を以て変調した振動波強制電流源を製作する事が可能であれば、励振固有波函数は容易に測定出来る。この際振動波を常に $S(t)$ 波ならしめるか、又は δ が偶発的な $S(t)$ 波ならしめるか、その別に依り製作する困難性が異なる。一般に前者の方式よりも後者の方式の方が遙かに容易である。



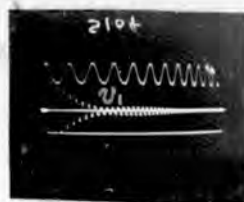
第4.3.1図 SLO波発生装置

[1] $R_S = 25K\Omega$ [2] $R_S = 2.5K\Omega$

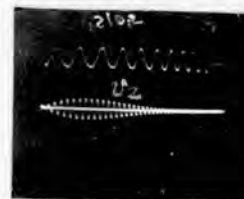
第4.3.2図 SLO波発生装置の波形

[1] v_s の波頭部分
($R_S = 2.5K\Omega$)

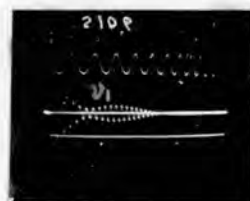
[2] 単一線輪



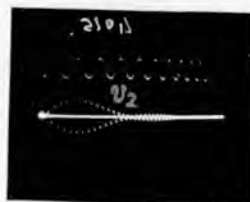
[3] 最粗結合 (-次)



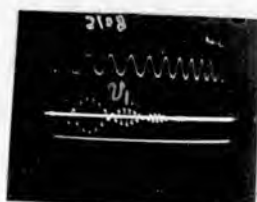
[4] 同左 (=次)



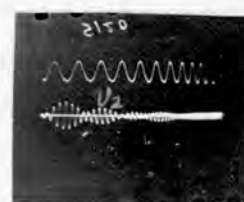
[5] 中結合 (-次)



[6] 同左 (=次)



[7] 最密結合 (-次)



[8] 同左 (=次)

第4.3.3図 基準固有波 (インディシャル・インピーダンス) の測定
(時較正 50 Kc)

筆者は基準固有波の測定のみならず、励振固有波の直接測定も可能なことをめんと、同路方式を検討した結果、第二京大法の手法を用い、真空管を併用して、簡単な[S]波発生装置を造る事が出来た。其の回路構成は、第4.3.1図に示す如くである。其の寄生波形は第4.3.2図[1][2]の如くで、若干直流分の歪曲が重畳して居るが、又は測定値の大局には影響しない。標準抵抗 R_s に依り出力振動電流の較正が出来るが、中装置に於ては、出力電圧の値が小さいので、第二京大法の原理を其の儘本法に移す事は出来ない。よつて、実際の動作状態に近い回路構成を撰び、例へば R_m を増幅真空管の内部抵抗に近似して値を取る等の事をして、総合的に励振固有波を求めるがよい。何れにせよ、本法の如き手法を併用し、基準及励振固有波函数の測定を行つて、増幅回路特性を観察し得る、事は、包絡演算法に取つて極めて有用な事である。

4.3.3 中間周波変成器に対する実測例

(1) 基準固有波函数の測定

基準及び励振固有波を測定する目的を以て、190K μ の中間周波変成器の既製品を取り、其の結合度を、密、中、粗の三般に変化し、各場合の固有波を測定する事とした。測定実施の際最も注意を要するのは、陰極線オシログラフの偏位板及導線の静電容量の影響であつて、本測定例では約15pFが存在したので、其の容量と同等の附加静電容量器を用意し、偏位板を被試物から切離した時は、この静電容量器を代りに挿入して、全体の回路状態に影響する虞無からしめた。

第4.3.3図[1]は、基準固有波函数即インディシャルインピーダンスを測定する目的で施行した第二京大法の標準抵抗に対する較正波を示すもので、 $R_s = 2.5 K\Omega$, $R_m = 75 K\Omega$ の状態¹⁾で行つたものである。オシログラムより明かな如く、殆んど完全な矩形波電流を造る。この際の時間軸較正波は500K μ である。

第4.3.3図[2]以降は、上の電流を被試変成器の一次側へ入れた時のオシログラムであつて、 v_1 は一次側の電圧波形を示す。[2]は単一線輪の場合即二次線輪を取去つた一次線輪のインディシャルインピーダンスであつて、[3][4]は最粗結合状態、[5][6]は中結合状態、[7][8]は最密結合状態のものである。三等の結合度は被試変成器の構造と得られたものであるが、最粗結合状態に於ても未だ臨界結合状態に達せず、複合振動波を成す事が判る。

1) 第1.3.2図 第二京大法結線図参照

以上を通覧して、元等基準固有波函数の実験式的表示を試みると、概略次の如きものとなる。

(a) 一次側

(1) 単一線路の場合 (第4.3.3図(2))

インディシャル・インピーダンスは

$$3.0 \varepsilon^{-36.5 \cdot 10^3 t} \sin 2\pi \cdot 190 \cdot 10^3 t \text{ K}\Omega$$

である。これを $S[0]$ 波 ($\omega = 2\pi \cdot 190 \cdot 10^3 t$ と取る。以下全部同値) として表すと、

$$y(t) = 3.0 \varepsilon^{-36.5 \cdot 10^3 t} S[0] \text{ K}\Omega$$

(2) 最粗結合の場合 (第4.3.3図(3))

この場合は、

$$3.0 \varepsilon^{-21 \cdot 10^3 t} \cos 2\pi \cdot 53 \cdot 10^3 t \sin 2\pi \cdot 190 \cdot 10^3 t \text{ K}\Omega$$

即、

$$y(t) = 1.5 \varepsilon^{-21 \cdot 10^3 t} \{ S[2\pi \cdot 53 \cdot 10^3 t] + S[-2\pi \cdot 53 \cdot 10^3 t] \} \text{ K}\Omega$$

(3) 中結合の場合 (第4.3.3図(5))

前と同形であって、 $S[\omega(t)]$ 波となる。即

$$y(t) = 1.5 \varepsilon^{-17 \cdot 10^3 t} \{ S[2\pi \cdot 7.3 \cdot 10^3 t] + S[-2\pi \cdot 7.3 \cdot 10^3 t] \}$$

(4) 最密結合の場合 (第4.3.3図(7))

同様に $S[\omega(t)]$ 波を形成し

$$y(t) = 1.5 \varepsilon^{-15 \cdot 10^3 t} \{ S[2\pi \cdot 15.8 \cdot 10^3 t] + S[-2\pi \cdot 15.8 \cdot 10^3 t] \}$$

(b) 二次側

(1) 最粗結合の場合 (第4.3.3図(4))

傳達インディシャル・インピーダンスは

$$2.76 \varepsilon^{-21 \cdot 10^3 t} \sin 2\pi \cdot 5.3 \cdot 10^3 t \sin 2\pi \cdot 190 \cdot 10^3 t \text{ K}\Omega$$

即、

$$y(t) = 1.38 \varepsilon^{-21 \cdot 10^3 t} \{ S[\frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot 5.3 \cdot 10^3 t] - S[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 5.3 \cdot 10^3 t] \} \text{ K}\Omega$$

(2) 中結合の場合 (第4.3.3図(6))

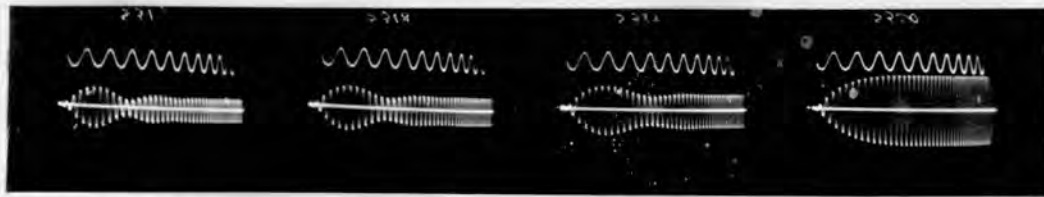
前と同形であるから

$$y(t) = 0.93 \varepsilon^{-17 \cdot 10^3 t} \{ S[\frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot 7.3 \cdot 10^3 t] - S[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 7.3 \cdot 10^3 t] \} \text{ K}\Omega$$

(3) 最密結合の場合 (第4.3.3図(8))

同様に

$$y(t) = 0.89 \varepsilon^{-15 \cdot 10^3 t} \{ S[\frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot 15.8 \cdot 10^3 t] - S[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 15.8 \cdot 10^3 t] \} \text{ K}\Omega$$

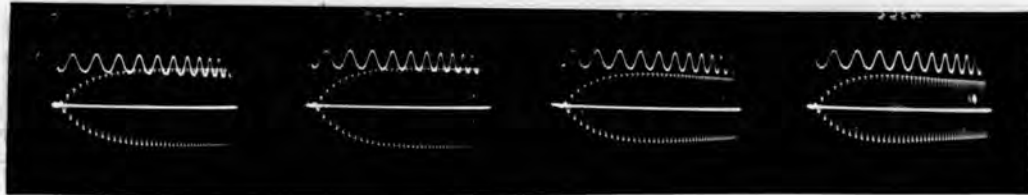


146.2 Kc

157.4 Kc

168.5 Kc

179.1 Kc

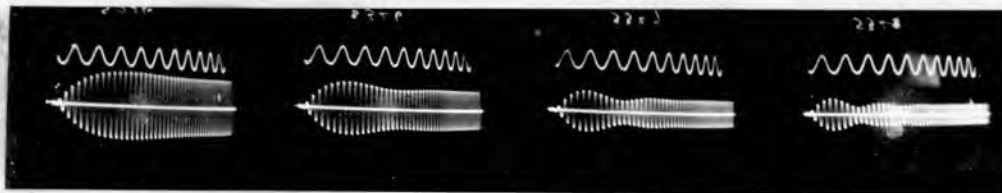


184.2 Kc

189.3 Kc

194.3 Kc

199.2 Kc



203.7 Kc

208.5 Kc

216.9 Kc

224.0 Kc

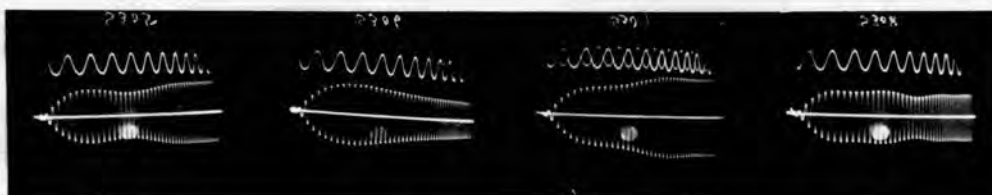
第4.3.4圖 單一線輪の励振固有波



224.0 Kc

216.9 Kc

208.5 Kc

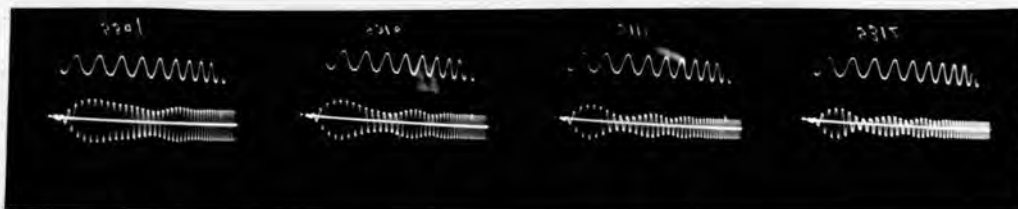


199.2 Kc

189.2 Kc

179.1 Kc

168.5 Kc



157.4 Kc

146.2 Kc

134.7 Kc

123.0 Kc

第4.3.5圖 最粗結合時一次側励振固有波

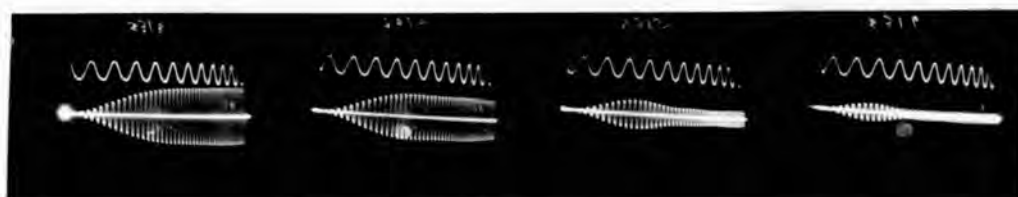


157.4 Kc

168.5 Kc

179.1 Kc

189.3 Kc



194.3 Kc

199.2 Kc

203.7 Kc

208.5 Kc

第4.3.6図 最粗結合時二次側の励振固有波



111.7 Kc

123.0 Kc

134.7 Kc

146.2 Kc

157.4 Kc



163.6 Kc

168.5 Kc

179.1 Kc

189.3 Kc

第4.3.7図 最密結合時一次側の励振固有波



111.7 Kc

123.0 Kc

134.7 Kc

146.2 Kc



157.4 Kc

168.5 Kc

179.1 Kc

189.3 Kc

第4.3.8図 最密結合時二次側の励振固有波

中心周波数は190 K ν であつて、全オシログラム共一定不変となつて表れて居る。二次線輪の結合度が増すと、之に伴れ走々の偏角周波数で上下に離調する様が判然とする。参考として単一線輪の良度名を算出すれば、16.5であり、この状態では余り良くない事が判明する。

(ii) 励振固有波の測定

以上の如く求めた基準固有波の包絡函数の積分を求め代りに、前述第4.3.1図の如き500 μ 波電流の発生装置を用ひ、第4.3.2図の如き出力波を以て、励振固有波を直接に視察した結果は第4.3.4図以降に示す如きものとなつた。

第4.3.4図は単一線輪の場合に對し、駆動周波数を146.8 K ν より255 K ν 迄変化しつゝ測定した励振固有波であつて、其の形状は $Q_1(5,2)$ 函数に極めて類似して居る。

第4.3.5図は最粗結合状態の時の一次側励振固有波であり、第4.3.6図は、同二次側の丈である。励振周波数はオシログラムの下部に記入した。この場合の波形は最早単一の $Q_n(5,2)$ 函数では表現され難い状況にある事が判る。

第4.3.7図は密結合状態の一次側励振固有波、第4.3.8図は、二次側の丈を示す。この場合は中心周波数より離隔した160 K ν 附近で階段狀の波形を形成し、中心周波数190 K ν 附近では度つて振幅が減退する事が判る。この階段狀波に因しては、別添ではあるが「當て森脇氏¹⁾」が計算された一例題の結果と極めて類似するから、包絡演算法に依る $Q_n(5,2)$ 函数を使用しても同一の結果を収める事が期待される。

以上基準固有波と励振固有波の姿態々兩者の關係を實驗的に明瞭ならしめ、インデシヤル・インピーダンス測定法を包絡演算法へ適用する一例題とする。

4.4 結 言

インデシヤル・インピーダンス測定法の一應用として包絡演算法に對する適用を説くに當り、該法の成り立ちを説明すべく、思はぬ紙数を費したが、これにて本法の緒口を解説したに止まる。

本論文の主題はインピーダンス測定法にあるので、之に對する關係を失せぬ様に留意し、特に基準固有波即インデシヤル定数と包絡演算法の基礎定理との關係を明かにする事に重きを置いた。従つて本演算法の解説は

¹⁾ 森脇義雄; 電通学誌 28 177 (昭19-6) (24)

長大であつたが、これを附録へ収める事無く総て本章中に収録した。

本章に現れた包絡演算法なる演算法則は、出發点、内容及構想は全く漸新であるが、其の結果は近來近似計算法に依り別途盛んに算定せられて居る¹⁾高周波多段増幅器の過渡現象論究の結果と全く類似の結果を與へる。三等の手法と本法とを比するに先づ指摘される事は本法の成る根拠が明確な事と美麗なる事である。殊に Q 函数を設定すれば全回路計算が、其の加減集積に集約される事は特筆すべきであらう。殊に單位函数以外の圖形的周期函数其の他に對し危惧なく計算が行はれ、包絡演算法を名実共に施行し得る事も特徴の一つと思はれる。

本章では末尾に實驗を以て、基準固有波数 ω_0 測定例及其の励振固有波数の實際を明かにした。其の結果は概ね Q 函数の組合せより推定されるものに近いが²⁾夫自体は觀測的資料として獨特の立場を失するものではない。

包絡演算法自体に関する問題は、えが余りに大きく夫の³⁾で將來一体系を成す部向と思はれるので、本章では基礎的事項に止め内題を専らインデイヤル・インピーダンス測定法の應用部内に置いた。其の一資料に對する實驗的檢討は既述の如き鮮麗な結果を収める事が出来た。尚ほ在來存在する Q メータ、帶域特性直視裝置等と比肩して、インデイヤル・インピーダンス測定法が、中間周波変成器等の性能綜合試験法として用ひられる如き將來も待望される次第である。

1) 例へば前出 森脇氏論文⁽²⁴⁾及近藤元治氏論文(未發表)等

第 2 編

測定線上の波動変歪誤差に関する研究

第 V 章 測定線に関する研究¹⁾

5.1 緒言

陰極線オシログラフに據つて、高速度過渡現象を測定せんとするに際し、通常測定線なる特殊の線路を使用する。この線路を附する主要な理由は、被測定物の発生する強力電磁界からオシログラフを離隔する爲、又は寧ろ地理的距離を連絡する爲、或は又現象波を特に時間的に遅らせしめる目的で所謂遅延線として使用する場合等である。

本章では、測定線の使用目的、構成法等から其の種類を適切な四種類に分類して定義する。次に測定誤差の原因を分類し測定線の良否を示す要件として、影像定数を推奨し、この定数と現象演算法を使用して二導体測定線の変歪特性の一般理論を明白にする。次に実験的検討に移り分圧線用として提供された二種の遮蔽線の特性を実測し、次に測定導線数種に就て、その変歪誤差を吟味する。之等検討は専ら分圧線、導線を対象とし、遅延線に関するものは後章に譲る。

5.2 測定線の定義、変歪誤差の分類及測定線の示性條件

5.2.1 測定線の定義

測定線に與ふべき定義として次のものを採る。

定義: 測定線とは、衝撃性電圧電流等の測定に當り、被測定波をオシログラフ端子に導入する目的で展張せらるる線路であつて、その線路に対する波動性の対策が必然とせらるるものを云ふ。

測定線を次の四種類に分類する。

a. 測定分圧線

線の始終端に於て、分圧分流等を兼用する整合インピーダンスを備へる遮蔽線

b. 測定導線

オシログラフの端子を終端とし、且始端に於て整合を考慮した導線

c. 遅延分圧線

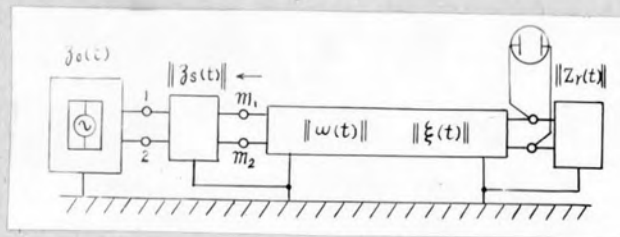
線路の波動性を利用し測定波を遅延させるべくした測定導線

以上の各種類の内前二者を本章で検討し後者は第VI章に於て検討する。

5.2.2 変歪誤差の分類

測定線に附随する誤差の誘因事項を列記すると、

¹⁾鳥養、林、岩本：測定線に関する研究寄與 22 聯大 3 (昭 18-4)⁽²⁵⁾ に一部を既発表



第5.3.1図 二導体測定線の一般回路

- (i) 被測定原波に與へる攪乱
- (ii) 測定線の減衰損失、分布定数の不均一性に依る変歪
- (iii) オシログラフの端子静電容量と測定線の波動インピーダンスとが直結する変歪
- (iv) 整合不完全に依る連續及射り変歪
- (v) 外部電磁界に依り測定線に誘導する局部障害電圧の攪乱

以上5者が數へられ、之は多かれ少かれ存在し、除去不可能である。

5.2.3 測定線の示性條件

測定線の良否判別及測定誤差検討の基礎をなす條件には種々のものが考へられるが、此處では前編のインピーダンス函數測定法に述べた如き根據即觀測を基とする現象演算法に従ひ、次のものを定める。

- a、測定線の波動インピーダンス $w(t)$ 若くは其の中核演算子函數 $W(p)$
- b、測定線の影像電圧比 $\xi(t)$ 若くは其の中核演算子函數 $\xi(p)$

以上二者は實測に依り定める事を本旨とするが、等價回路から數式的に誘導しても差支へない。 $w(t)$ 及 $\xi(t)$ の實測法は既に前編第II章 2.4に述べた。

5.3 変歪誤差の基礎算式及電磁誘導攪乱

5.3.1 変歪特性

單位函數狀原波に対する測定器端子電圧を以て変歪特性と定義する。この場合電磁誘導攪乱を算入しない。

★ 5.3.1 図は習慣的に造られる二導体測定線の一般的表示である。この二導体測定線は後述の対稱測定線の基本形である。今の場合線路は、左右対稱と假定する。被測定電圧は、電源端子 1, 2間を開放した時に出現する電圧である。1, 2端子と m_1, m_2 端子間のインピーダンス網は m_1, m_2 端子から左に見たインピーダンスが波動インピーダンスに近き様に選ぶ。 $1', 2'$ 端子の右側に於ても同様である。線路外部部は直接接地が普通であるから大地と一体に取扱ふ。

以下マトリックスで表示し、1及2端子の対地電位を $\|v_o(t)\|$, $1'$ 及 $2'$ 端子の夫を $\|v_r(t)\|$, m_1, m_2 端子に於て右側を開放した時に、伝達される電圧を $\|v_s(t)\|$ とする。其の各要素を

$$\|v_o(t)\| = \begin{bmatrix} v_1(t)_o \\ v_2(t)_o \end{bmatrix}, \quad \|v_r(t)\| = \begin{bmatrix} v_1(t)_r \\ v_2(t)_r \end{bmatrix}, \quad \|v_s(t)\| = \begin{bmatrix} v_1(t)_s \\ v_2(t)_s \end{bmatrix}$$

----- (5.3.1)

とする。

$\|v_s(t)\|$ は $\|v_0(t)\|$ に簡単な係数 $\|\gamma_s(t)\|$ を乗じて得られ、

$$\|v_s(t)\| = \|\gamma_s(t)\| * \|v_0(t)\| \quad \text{----- (5.3.2)}$$

で表す。 $\|\gamma_s(t)\|$ は通常視察で決定する事が出来る。

m_1, m_2 端子より左側の対地インピーダンスを $\|z_s(t)\|$ 、 $1', 2'$ 端子より右側の夫を $\|z_r(t)\|$ として表せば、其の各々の要素は

$$\|z_s(t)\| = \begin{bmatrix} z_{11}(t)_s & z_{12}(t)_s \\ z_{21}(t)_s & z_{22}(t)_s \end{bmatrix}, \quad \|z_r(t)\| = \begin{bmatrix} z_{11}(t)_r & z_{12}(t)_r \\ z_{21}(t)_r & z_{22}(t)_r \end{bmatrix} \quad \text{----- (5.3.3)}$$

である。他方、測定線路の波動インピーダンス $\|w(t)\|$ 及影像電圧比 $\|\xi(t)\|$ は各4個あり

$$\|w(t)\| = \begin{bmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) \\ w_{21}(t) & w_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad \|\xi(t)\| = \begin{bmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{12}(t) \\ \xi_{21}(t) & \xi_{22}(t) \end{bmatrix} \quad \text{----- (5.3.4)}$$

である。この内の $w_{11}(t)$ 及 $w_{22}(t)$ は1及2線各独立時に測定した対地駆動実インピーダンス、 $w_{12}(t)$ 及 $w_{21}(t)$ は1より2、及この逆に対し測定した対地伝達インピーダンスである。 $\xi_{11}(t)$ は端子2を零電位に保ち、端子1に電圧を加へ1'との間に対し測つた影像電圧比、 $\xi_{12}(t)$ は、同一場合2'への影像電圧比である。 $\xi_{22}(t)$ 及 $\xi_{21}(t)$ は端子交換して同様に決定される。

オシログラフ端子に現れる電圧は $v_1(t)_r - v_2(t)_r$ である。全回路の定数を上記の如く m_1, m_2 端子及 $1', 2'$ 端子で切断し三部分に分つて各個決定した上はテブナン定理に依り

$$\begin{aligned} \|v_r(t)\| &= \|\eta(t)\| * \|\omega(t)\| * \{\|\omega(t)\| + \|z_s(t)\|\}^{*-1} * \|v_s(t)\| \\ \|\eta(t)\| &= 2 \|z_r(t)\| * \{\|\omega(t)\| + \|z_r(t)\|\}^{*-1} \\ &\quad * \left\{ U + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\|\xi(t)\| * \|\mu_s(t)\| * \|\xi(t)\| * \|\mu_r(t)\|)^{\nu} \right\} * \|\xi(t)\| \end{aligned} \quad \text{----- (5.3.5)}$$

但、

$$\begin{aligned} \|U\| &= \text{単位マトリックス} \\ \|\mu_s(t)\| &= (\|z_s(t)\| - \|\omega(t)\|) * (\|z_s(t)\| + \|\omega(t)\|)^{*-1} = \text{反射マトリックス} \\ \|\mu_r(t)\| &= (\|z_r(t)\| - \|\omega(t)\|) * (\|z_r(t)\| + \|\omega(t)\|)^{*-1} = \text{同上} \end{aligned} \quad \text{----- (5.3.6)}$$

となる。

上記が最も一般的と思惟される変歪の基礎算式である。 $\|v_0(t)\|$ が単位函数状であるとき $v_1(t)_r - v_2(t)_r$ を以て変歪特性とする事を得る。

5.3.2 電磁誘導擾乱

等価回路を假定して、電磁誘導擾乱の影響を算出する事は困難である。此處では観測的結果を基とし、 m_1, m_2 端子及 $1', 2'$ 端子を切離した時、測定線路に誘発してこの端子に生ずる電位を $\|e_s(t)\|$ 及 $\|e_r(t)\|$ として吟味するがよい。 $\|e_s(t)\|$ 及 $\|e_r(t)\|$ を誘発する原因には、線路1及2への直接的な電束及磁束誘導の外、線路外郭導体及大地の電位勾配の積分が含まれる。

測定線の配置が適当であると、1及2兩導体の誘起電圧を同一にする事が出来る。 $\|e_s(t)\|$ 及 $\|e_r(t)\|$ が定まつたならば、障害電圧 $\|v_r(t)\|$ は形式的に

$$\|v_r(t)\| = \|\eta(t)\| * \left\{ \|\xi(t)\|^{*-1} * \|e_r(t)\| - \|\omega(t)\| * (\|\beta_s(t)\| + \|\omega(t)\|)^{*-1} * \|e_s(t)\| \right\} \quad (5.3.7)$$

で與へられる。オシログラフ端子には $\|v_r(t)\|$ の要素の差が出現するから、測定線の対稱化を図つて之を零とする事が可能である。

5.3.3 対稱測定線の構成條件と変換特性

対稱測定線の構成條件は $\|\omega(t)\|, \|\xi(t)\|$ の各対角要素が相等しい事である。¹⁾

$$\omega_{11}(t) = \omega_{22}(t) \equiv \omega_0(t), \quad \omega_{12}(t) = \omega_{21}(t) \equiv \omega_m(t)$$

$$\xi_{11}(t) = \xi_{22}(t) \equiv \xi_0(t), \quad \xi_{12}(t) = \xi_{21}(t) \equiv \xi_m(t)$$

である。この場合、(5.3.5) を構成して居る $\|v_s(t)\|$ 以外のマトリックスは当然対角要素が相等しい。従つて今

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

なる変換マトリックスを取れば、

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \beta(t) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_0(t) + \beta_m(t) & 0 \\ 0 & \beta_0(t) - \beta_m(t) \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \xi(t) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_0(t) + \xi_m(t) & 0 \\ 0 & \xi_0(t) - \xi_m(t) \end{vmatrix}$$

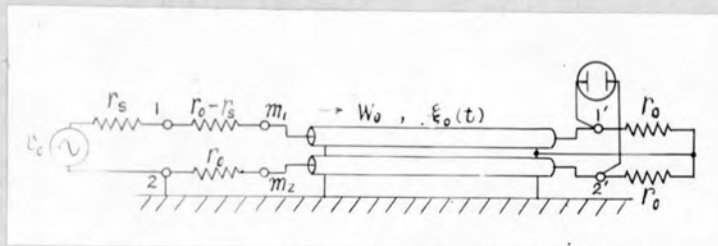
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} v(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} v_1(t) + v_2(t) \\ v_1(t) - v_2(t) \end{vmatrix}$$

と変換される。この結果全マトリックス乗積は著しく簡單となり (5.3.5)

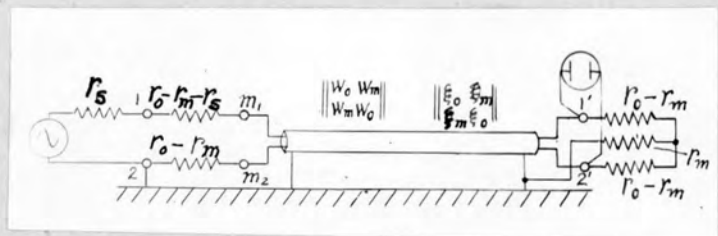
は、

$$\begin{vmatrix} v_1(t)_r + v_2(t)_r \\ v_1(t)_r - v_2(t)_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(t) & 0 \\ 0 & f_2(t) \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} v_1(t)_s + v_2(t)_s \\ v_1(t)_s - v_2(t)_s \end{vmatrix} \quad \dots (5.3.8)$$

¹⁾ 対角要素が相等しい事は、各端子定数が相互に区別出来ぬ事を示す。之は取りも直さず対稱の状態である。



第5.3.2図 双単心ケーブル分圧線



第5.3.3図 ニ心ケーブル分圧線

となる。目的とする測定電圧は $v_1(t)_r - v_2(t)_r$ なる故

$$v_1(t)_r - v_2(t)_r = f_2(t) * \{v_1(t)_s - v_2(t)_s\} \text{-----} (5.3.9)$$

が所望の変歪特性となる。次下分圧線の二種類の構成例に就て $f_1(t)$, $f_2(t)$ を算出する事とする。

(i) 双重心ケーブル対稱分圧線

オ5.3.1図の如く構成する。この際整合には抵抗を用ふる。其の理由はケーブルの波動インピーダンスが抵抗に近いからである。端子2は被測定電源の性質上接地する。この場合は $\| \eta_s(t) \|$ は単位マトリックス, $\| \beta_s(t) \|$, $\| \beta_r(t) \|$ の伝達インピーダンスは零, $w_m(t)$, $\xi_m(t)$ は遮蔽完全を零と取つて差支へない。故に

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) = f_2(t) &= \frac{2Y_0}{Y_0 + w_0(t)} * \left\{ H(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mu(t) * \xi_0(t))^{\nu} \right\} * \frac{\xi_0(t) * w_0(t)}{Y_0 + w_0(t)} \\ \mu(t) &= \frac{Y_0 - w_0(t)}{Y_0 + w_0(t)} \end{aligned} \right\} \text{-----} (5.3.10)$$

となり、この場合 $v_1(t)_s = v_0(t)$, $v_2(t)_s = 0$ であるから $f_1(t) = f_2(t)$ の理由に依り $v_2(t)_r = 0$ である。若しケーブルの波動インピーダンス $w(t)$ が抵抗 W_0 と同等であれば $Y_0 = W_0$ と取る事に依り $\mu(t) = 0$ となり

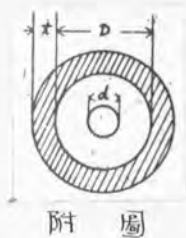
$$v_1(t)_r = \frac{1}{2} \xi_0(t) * v_0(t) \text{-----} (5.3.11)$$

となる。即この場合は分圧比 $1/2$ の分圧線として働いて居り、変歪特性は主として $\xi_0(t)$ に依り影響を受ける。

(ii) 二心ケーブル対稱分圧線

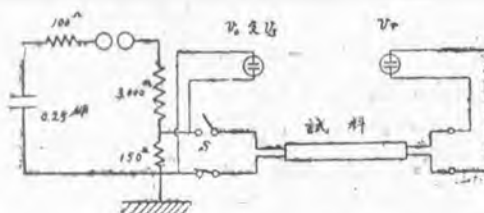
オ5.3.3図の如く構成した場合を吟味する。ケーブルの定数は、対称であつて、各対角要素は相等的い。図の場合 $\| w(t) \|$ に対し $\| \beta_r(t) \|$ は整合可能形 $\| \beta_s(t) \|$ は不可能形である。 $\| \eta_s(t) \| = \| I \|$, $v_1(t)_s = v_0$, $v_2(t)_s = 0$ である。事が判る。計算の結果

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= \frac{2(Y_0 + Y_m)}{Y_0 + Y_m + w_0(t) + w_m(t)} * \left[H(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_r(t)^{\nu} * \mu_s(t)^{\nu} * (\xi_0(t) + \xi_m(t))^{\nu} \right] \\ &\quad * \frac{w_0(t) + w_m(t)}{Y_0 - Y_m + w_0(t) + w_m(t)} * \{ \xi_0(t) + \xi_m(t) \} \\ f_2(t) &= \frac{Y_0 - Y_m}{Y_0 - Y_m + w_0(t) - w_m(t)} * \left[H(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_r(t)^{\nu} * [\xi_0(t) - \xi_m(t)]^{\nu} \right] \end{aligned} \right\}$$

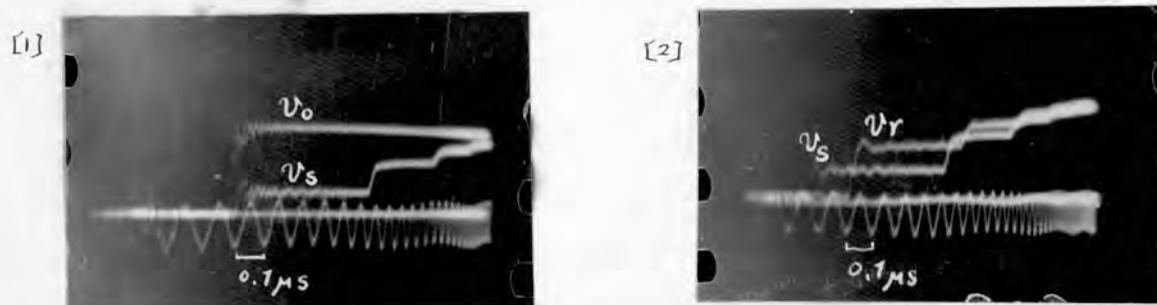


名 稱	中心導體		外 部 導 體			絶 縁 體 材 料	全長 $l(\text{m})$
	材料	$d(\text{mm})$	材料	D	t		
鉄管線	銅單線	3.6	鐵管	40.5	2.85	50cm 隔 ノ ッ プ	46.8
ゴムケ ーブル	銅撚線	9.5	銅編組	18.0	0.5	黒 色 單 ム 層	39.5
鉛被線	銅單線	1.2	鉛	8.6	3.7	第 四 種 線 相 當	16.1

第5.4.1表 試料の構造



第5.4.1圖 実験回路

第5.4.2圖 鉄管線 ($w=165\Omega$, $g=250\text{m}/\mu\text{s}$, $\alpha=1/14$)第5.4.3圖 ゴムケーブル ($w=52\Omega$, $g=130\text{m}/\mu\text{s}$, $\alpha=1/12$)第5.4.4圖 鉛被四種線 ($w=44\Omega$, $g=160\text{m}/\mu\text{s}$, $\alpha=1/4.9$)

$$\ast \frac{2\{\omega_o(t) - \omega_m(t)\}}{r_o - r_m + \omega_o(t) - \omega_m(t)} \ast [\xi_o(t) - \xi_m(t)]$$

$$\mu_s(t) = \frac{r_o - r_m - \{\omega_o(t) + \omega_m(t)\}}{r_o - r_m + \omega_o(t) + \omega_m(t)}$$

$$\mu_r(t) = \frac{r_o + r_m - \{\omega_o(t) + \omega_m(t)\}}{r_o + r_m + \omega_o(t) + \omega_m(t)}$$

$$\mu_o(t) = \frac{r_o - r_m - \{\omega_o(t) - \omega_m(t)\}}{r_o - r_m + \omega_o(t) + \omega_m(t)}$$

----- (5.3.12)

である。若し $\omega_o(t)$, $\omega_m(t)$ が抵抗 W_o , W_m 同等に取扱ひ得る時には $r_o = W_o$, $r_m = W_m$ なる条件をもたせることにより

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2} \frac{r_o + r_m}{r_o} \{\xi_o(t) + \xi_m(t)\} \\ f_2(t) &= \frac{1}{2} \{\xi_o(t) - \xi_m(t)\} \end{aligned} \right\} \text{----- (5.3.13)}$$

となる。故に

$$\left. \begin{aligned} v_1(t)_r &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{2r_o + r_m}{r_o} \xi_o(t) + \frac{r_m}{r_o} \xi_m(t) \right\} \\ v_2(t)_r &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{r_m}{r_o} \xi_o(t) + \frac{2r_o + r_m}{r_o} \xi_m(t) \right\} \\ v_1(t)_r - v_2(t)_r &= \frac{1}{2} \{\xi_o(t) - \xi_m(t)\} \ast v_o(t) \end{aligned} \right\} \text{----- (5.3.14)}$$

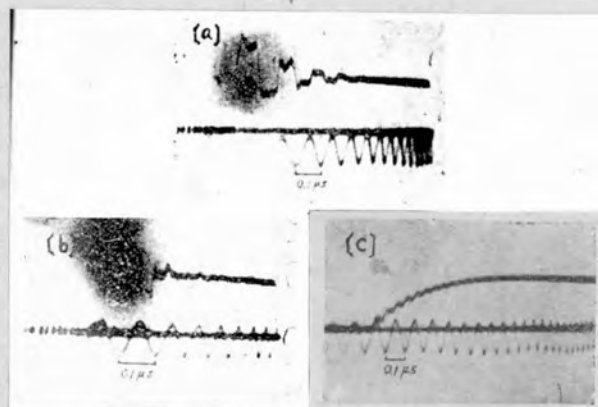
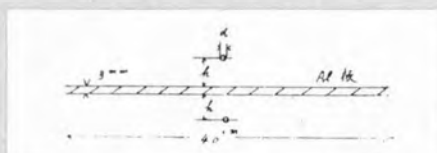
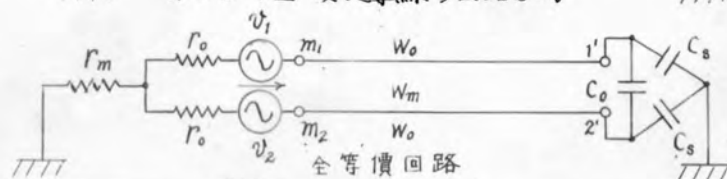
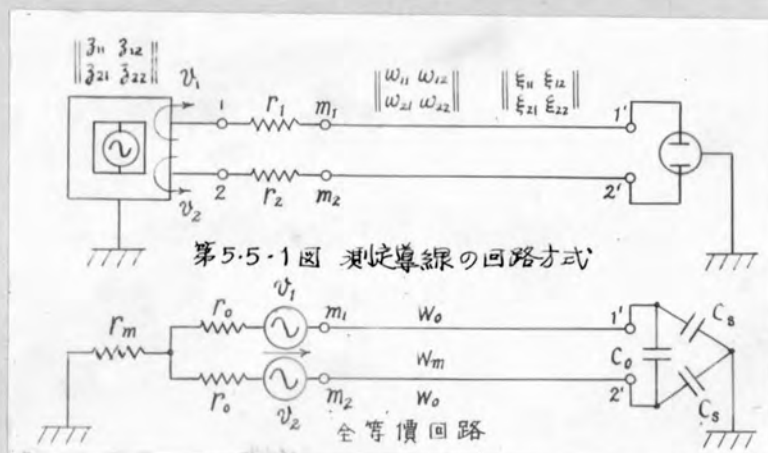
である。即ち $v_1(t)_r - v_2(t)_r$ に対しては分圧比 $1/2$ の分圧線として働作する。

5.4 同心円筒状遮蔽線の実測特性

分圧線に使用すべき数種の試料を取り、其の示性条件から見た特性を実測する。

試料：—測定試料には三種の導体を用いた。何れも同軸円筒状遮蔽線である。其の類別は (i) 鉄管外被遮蔽線、(ii) ゴム可撓ケーブル (iii) 鉛被第四種絶縁電線であつて、其の断面形状、構造寸法は第5.4.1表に示す如くである。之等の内、鉄管外被線は京都大学に於て作製せるもので、資材難の折此の測定線が如何なる特性を示すか多大の期待をかけた。

実験回路：—インピーダンス及電圧比の測定に対しオースタ法を用ひ、



試料A, 中心導体 19/0.23mm, 外部導体内径 10mm, $C = 200\text{pF}$

第5.5.4図

オ5.4.1図の回路を構成した。資料の長さが短いので、測定導線の誤差が最小となるべく極度の注意を拂ひ、電源と使用掃引域で可及的急峻波を得るべく奮心し、其の結果若干の振動分を発生するに至つたが其の儘用いた。

測定結果：測定操作は、最初目を閉まざる時の端子電圧を測定して之を v_0 とし、次で目を閉した時の送端電圧を測定して v_s とし更に受端開放電圧を測定して v_r とした。之等電圧はオシログラム上に記入した。

オ5.4.2図[1][2]に鉄管線、オ5.4.3図[1][2]にゴムケーブル、オ5.4.4図に鉛被線の同様測定結果を示す。之等より算出した初期波動インピーダンス W 及伝播速度 g は同図下方に記した。尚影像電圧比は正確な形状が不明確であるので、之の代表的表示として $1 - e^{-\alpha g t/2}$ の如きを取り v_r の上より初期の傾斜から α を出し参考にした。この α は W, g と共に並記した。而して α の値は、其の線固有のものでなく、全部が同一長の状況のものを比較して居るのに近い効果を有する。

実測結果を見るに鉄管線が最も優良であり、この程度の変歪ならば測定線として充分満足出来る程度である。ゴムケーブルの成績も可成りのもので、鉄管線に次ぎ、鉛被線は最も悪い。

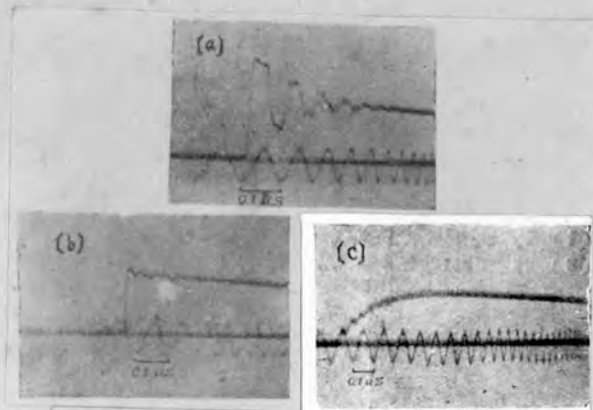
5.5 測定導線に依る変歪

測定導線の変歪誤差の概要：導線は其の存在が分圧比に參與する事無きを以て本質とする。仍て其の使用状況はオ5.5.1図に一例を示すやう、其の終端はオシログラフの偏位板に接合されてゐる。導線が長くなると、その波動性に依り振動を起すから、導入端には抵抗 r_1 及 r_2 を入れて防止すべきである。而して導線は極力対稱構成とし、且つ遮蔽を有するオがよい。

一般的に理解が平易に行はれる様特別の場合を取る。即導線が各線対稱に配置せられ、其の波動インピーダンスは抵抗同等とする。又被測端子の内部定数も抵抗と等價とする。 r_1 及 r_2 と被測端子の内部定数を相加して整合を図り対稱化する。然る時オ5.5.1図はオ5.5.2図の如き等價回路で與へられる。 C_0 はオシログラフ偏位板間静電容量、 C_s は同対地間静電容量である。 W_0, W_m は導線の駆動及伝達インピーダンスである。

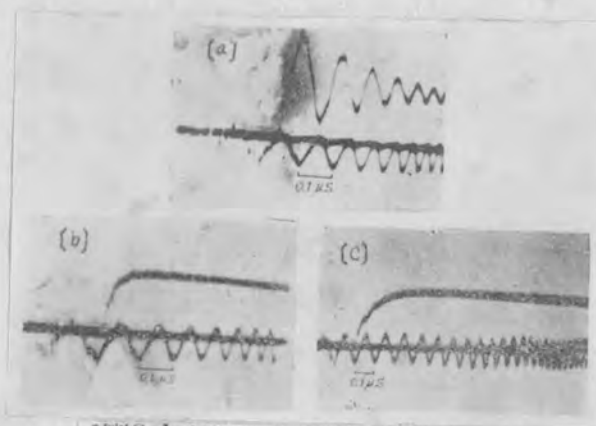
$\gamma_0 = W_0 - W_m, \gamma_m = W_m$ なる二條件に於て整合状態となり、この時のオシログラフ偏位板電位は

$$\|v_r(t)\| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \eta_\alpha(t) & \eta_\beta(t) \\ \eta_\alpha(t) & -\eta_\beta(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{vmatrix}$$



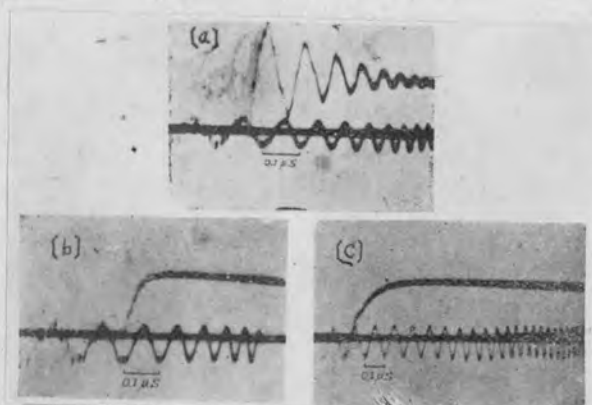
試料B, $d=2.0\text{mm}$, $h=4\text{mm}$, $W=125\Omega$, $C=120\mu\text{pF}$

第 5.5.5 図



試料C, $d=0.32\text{mm}$, $h=1.5\text{cm}$, $W=310\Omega$, $C=47\mu\text{pF}$

第 5.5.6 図



試料D, $d=0.1\text{mm}$, $h=4.5\text{cm}$, $W=450\Omega$, $C=32\mu\text{pF}$

第 5.5.7 図

資 料	$\tau_0 = W$		$\tau_0 = 1000\Omega$
	計 算	実 験	実 験
A	0.0048 μs	0.006 μs	0.28 μs
B	0.006	0.008	0.19
C	0.015	0.021	0.07
D	0.021	0.030	0.07

第 5.5.1 表 試料導線の波頭変位時定数

$$\eta_{\alpha}(t) = (1 - \varepsilon^{-\frac{t}{(W_0 + W_m)C_s}}) * \{ \xi(t) + \xi_m(t) \}$$

$$\eta_{\beta}(t) = (1 - \varepsilon^{-\frac{t}{(W_0 - W_m)(C_s + 2C_0)}}) * \{ \xi_0(t) - \xi_m(t) \}$$

$$v_1(t)_r - v_2(t)_r = \eta_{\beta}(t) * (v_1(t) - v_2(t)) \quad \text{----- (5.5.1)}$$

となる。この結果より、整合を完全に行っても偏位極静電容量が終局誤差の源泉であることが判る。被測定端子の内部インピーダンスが波動インピーダンスを凌駕せぬ限り、測定導線の波動インピーダンスは小なる方が良くと結論されるが他面、其の導線を附した爲の攪乱作用も充分考慮して置く事を必要とする。

実験的検討：— 極度に細小なる導体より、適度の太さの導体に至る途数種の資料を取つて、其の歪曲誤差を検討する。特に被測定端子のインピーダンスが高い場合に果して如何なる選定が良結果をもたらすか吟味する。

試料は下記4種であつて、長さは何れも4.8mである。

A. 高周波同軸コード (実測波動抵抗 100Ω)

B. 2.0mm D.C.C 銅線 (算定波動抵抗 125Ω)

C. 0.32mm エナメル銅線 (同上 310Ω)

D. 0.1mm エナメル銅線 (同上 450Ω)

試料B以下に対する導線配置は図5.5.3図の如くである。其の構造寸法は他の実験的数値と共に図5.5.1表に之を示す。実験結果に關係を有する偏位極静電容量は、実測の結果 $C_0 = 13 \text{ pF}$, $C_s = 22 \text{ pF}$ である。(オシログラフ内部配線を含む)。実験方法は図5.4.1図と類似の回路を用ひ、図5.5.2図の等価回路に於て v_1 のみ加へた形式とした。実験順序は次の3種類である。

[a] 不足整合の場合にして、各試料に就て $\Gamma_0 = 25\Omega$ の場合

[b] 完全整合の場合にして、各試料夫々の波動抵抗に対し $\Gamma_0 = W$ なる条件を保たせた場合、

[c] 被測定端子が高内部インピーダンスの場合にして、 v_1 側の $\Gamma_0 = 1000\Omega$, v_2 側の $\Gamma_0 = W$ なる場合。

之等の條件で測定したオシログラムは図5.5.4~7図の如くである。オシログラムに記入した [] 内の記号は前記実験類別を示す。尚資料Aに就ては実験結果から、他に就ては計算から得た導線一條の静電容量を C_L として図に記入した。

之等を検討するに、注目すべきは 0.32mm 程度の細導線の減衰性が左

程大でない事である。オ5.5.1 表に $\Gamma_0 = W$ の時に測定波の波頭傾斜から出した、波頭時定数の実験値と(5.5.1)を用い、 $\xi(t)$ を除外して計算した定数とを比較表示する。尚被測定端子抵抗が 1000Ω の場合実験値のみ表示した。計算値と実験値の相違は明かに導線の減衰性、即 $\xi(t)$ の存在を物語るものであるが、 0.32mm の資料では左程顕著な大きさではない。内部抵抗 1000Ω の場合は資料C及Dが良結果をもたらし、斯かる場合は導線を細小にする丁が有利との結論に達する。

5.6 結 言

本章では一般測定線の分類、定義を行つて其の種別を明かにし、二導体測定線に就て其の変歪特性の最も一般的なる理論式を提示し且つ簡單なる対稱測定線に対し、変歪特性の算定式を示した。実験的検討に於て、三種類の分圧線導体に対し、オ一京大法を使用して特性を調べ、軟管外被線の如きものも使用可能である丁を示した。測定導線に対しては、其の極限誤差が極板静電容量と導線の波動インピーダンスに基づく事を算式を以て示し、実験的検討に依り、整合可能状態では低波動インピーダンスの導線が良く高内部抵抗被測電源では細導線の使用が有利なる事を確認した。

第 VI 章

容量分圧器結合遅延線方式の研究

6.1 緒言

遅延線は多く自然雷の観測を目的として使用されるが、抵抗分圧器と結合して用いられる場合には、其の検討は容易で、前章に述べた分圧線の場合と、本質的には差異が無い。然るに遅延線が雷電圧の測定時に見られる様に送電線路、或は空中線容量分圧器に結合する場合には、特別な検討が必要である。この検討については Burch 氏が数種の分圧回路に対し既に行はれたものがあり、¹⁾ この種検討の鼻祖を成すと考へられる。之に対し筆者は更に発展し、分圧器の分圧比は自身独立的に、又、之に結合する遅延線の変歪及分圧作用も又独立的に検討する合理的立場を取り、一層廣い範囲に亘り定性及定量的吟味を行ふ事とする。而して筆者が優秀性を立證せんとする最合理的分圧回路と併せ紹介する。

吟味は特に遅延線静電容量が分圧器静電容量に比し、相当に大である場合に力を注ぐ事とする。其の理由は斯かる使用状態を己むとされる場合が尙々多い事と²⁾、才 IX 章に記述する誤差補正理論の適用に依り、必ずしも、変歪誤差を皆無に近からしめる必要も無いからである。従つて本章で行ふ計算式の中の重要な一部分は、才 IX 章測定誤差の補正理論、の内容に關聯させる事とする。

本章に取扱ふ数理解は、全て観測的基礎に立つ回路定数を基本として施行する立場を取るが、特に遅延線の波動インピーダンスが直線的に上昇する典型的場合をその例に取つて、一般的計算を行ふ事とする。

最後に數値計算數種と、若干の實驗的検討を附加して、参考とする。

6.2 回路構成

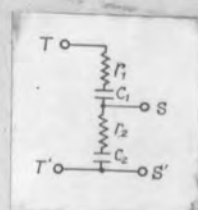
容量分圧器を才 6.2.1 図の如く、抵抗容量分圧器として用いる場合を考へる。TT' 端子間に接続される被測定電源の内部定数如何に拘らず、 $r_1 C_1 = r_2 C_2$ と選定するのが、この場合の合理的條件である。この時 TT' 端子間の電圧 $v_o(t)$ と、SS' 端子間の電圧 v_s とは時間的に同一比

$$n_a = r_2 / (r_1 + r_2) = C_1 / (C_1 + C_2) \quad \text{----- (6.2.1)}$$

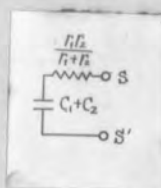
を保つ。他方 TT' 端子間から見たインディニヤル・インピーダンス $z_i(t)$ は

1) Burch: Phil Mag 13, 760 (1932) (26)

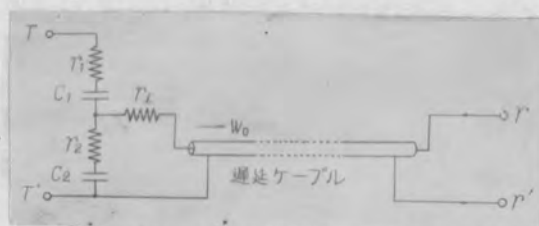
2) 日本學術振興會、才九特別委員會才ニ分科會報告 I (昭 15) II (昭 16) III (昭 17) (27)



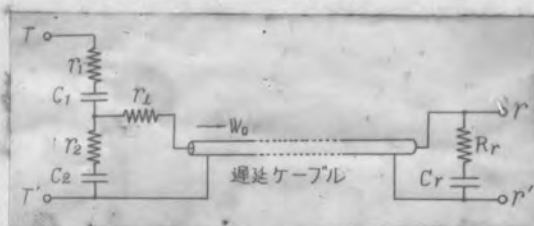
第6.2.1図



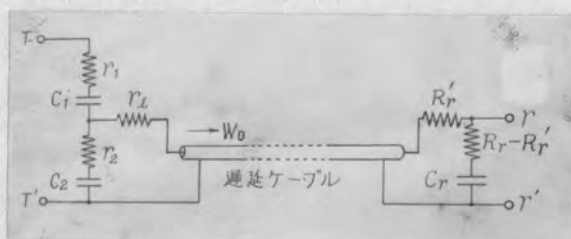
第6.2.2図



第6.2.3図 遅延導線方式



第6.2.4図 遅延分圧線方式



第6.2.5図 補償型遅延分圧線

$$Z_0(t) = \frac{1}{1-n_a} \left(r_i + \frac{t}{C_i} \right) \cdot H(t) \quad \text{----- (6.2.2)}$$

となり、之は被測定電源に攪乱作用を與へ其の影響は別途算定する。TT' 端子が短絡状態に於て、SS' 端子間から見たインディシャル・インピーダンス $Z_s(t)$ は

$$Z_s(t) = n_a \left(r_i + \frac{t}{C_i} \right) \cdot H(t) \quad \text{----- (6.2.3)}$$

である。其の等価回路は才6.2.2図の如くなる。

SS' 端子間に接続する遅延線は構成方法に二種類ある。即ち

(i) 導線型構成

(ii) 分圧線型構成

であつて、何れも遅延線の波動性振動を抑へ、攪乱作用及変歪誤差を最小にする爲整合を考慮しつつ構成を行ふ必要がある。其の各種方式として、才6.2.3~5図に三種類の例を示す。才6.2.3図は遅延導線方式、才6.2.4図は分圧線方式、才6.2.5図は補償分圧線方式と呼稱する。之等の中最後の補償分圧線方式は整合型とすれば最も有利性を有する回路として、推奨する。但し、才6.2.5図以外の型でも非整合型とすれば補償状態が得られるのであるが、之等は後に詳記する。

6.3 変歪特性及補償分圧線の構成法

6.3.1 一般式

遅延線として均質構造のケーブルの如きを使用するものとし、インディシャル波動インピーダンス $w(t)$ 及同影像電圧比を基として計算を行ふ。

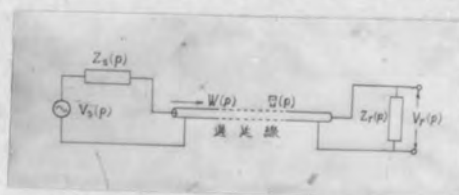
今 $W(p)$ 及 $\Omega(p)$ を以て、 $w(t)$ 及 $\xi(t)$ を代表する演算子函数とし、 $Z_s(p)$ 、 $Z_r(p)$ を以て、ケーブルの入力端及出力端に結合する回路系のインピーダンス函数とする。全遅延回路構成を才6.2.6図の如く書き表す時には、電圧源 $V_s(p)$ に対し終端電圧 $V_r(p)$ は次の如くなる。

$$V_r(p) = \frac{2W(p)}{Z_s(p) + W(p)} \left[1 + \sum_{v=1}^{\infty} U_s^v(p) U_r^v(p) \Omega^{2v}(p) \right] \frac{Z_r(p) \Omega(p)}{Z_r(p) + W(p)} V_s(p) \quad \text{----- (6.3.1)}$$

$$U_s(p) = \frac{Z_s(p) - W(p)}{Z_s(p) + W(p)}, \quad U_r(p) = \frac{Z_r(p) - W(p)}{Z_r(p) + W(p)} \quad \text{---- (6.3.2)}$$

$Z_s(p)$ 、 $Z_r(p)$ は前述の回路構成に支配されるが $U_s(p)$ 、 $U_r(p)$ を零に近からしめるには、夫等の値は一定範囲に収めねばならぬ。他方 $W(p)$ 及 $\Omega(p)$

0043



第6.3.1図 回路の一般的表示

は低損失ケーブルの如きものに対しては、略次の如き実験式から決定される形態を取る。

$$\left. \begin{aligned} W(t) &\doteq W(1+\sigma t) \cdot H(t) \\ \xi(t) &\doteq \frac{1}{\left(\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} = 1\right)} \left(1 - \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} e^{-\rho_{\nu} t}\right) * H(t-T) \end{aligned} \right\} \text{----- (6.3.3)}$$

之より $W(p)$ 及 $\xi(p)$ は

$$\left. \begin{aligned} W(p) &\doteq W_0 \left(1 + \frac{\sigma}{p}\right) \\ \xi(p) &\doteq \left(1 - \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \frac{p}{p + \rho_{\nu}}\right) e^{-pT} \end{aligned} \right\} \text{----- (6.3.4)}$$

である。

若し非常に低損失で減衰性が無視されるならば

$$\left. \begin{aligned} W(p) &\doteq W_0 \\ \xi(p) &\doteq e^{-pT} \end{aligned} \right\} \text{----- (6.3.5)}$$

と取つて差支へない。 $V_r(p)/V_s(p)$ は変歪特性乃至分圧特性を表し之を一般的に記号 $F(p)$ を以て表す。

容量分圧器に於ては、 $Z_s(p)$ 及 $Z_r(p)$ が抵抗と静電容量の和から成り、

$$Z_s(p) = R_s + \frac{1}{C_s p}, \quad Z_r(p) = R_r + \frac{1}{C_r p} \text{----- (6.3.6)}$$

である時 (6.3.4) を使用し、この場合の $F(p)$ の一般式を求めておけば

$$F(p) = 2n_L \frac{(p+\sigma)(n_r p + \beta_r - \overline{1-n_r\sigma})}{(p+\beta_s)(p+\beta_r)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{(\mu_s p + \beta_s - 2n_L \sigma)}{(p+\beta_s)} \cdot \frac{(\mu_r p + \beta_r - 2\overline{1-n_r\sigma})}{(p+\beta_r)} \right]^{\nu} \xi(p)^{2\nu+1} \text{----- (6.3.7)}$$

$$n_L = \frac{W_0}{R_s + W_0} = \frac{1 - \mu_s}{2}, \quad n_r = \frac{R_r}{R_r + W_0} = \frac{1 + \mu_r}{2},$$

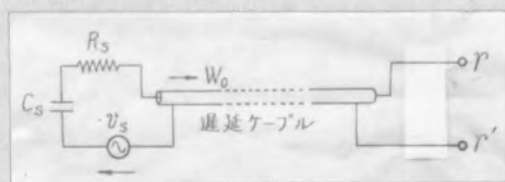
$$\mu_s = \frac{R_s - W_0}{R_s + W_0} = 1 - 2n_L, \quad \mu_r = \frac{R_r - W_0}{R_r + W_0} = 2n_r - 1,$$

$$\beta_s = \frac{1}{R_s + W_0} = \left(\frac{1}{C_s} + W_0 \sigma\right), \quad \beta_r = \frac{1}{R_r + W_0} \left(\frac{1}{C_r} + W_0 \sigma\right)$$

----- (6.3.8)

である。上式に於て σ を零に取り、 $\xi(p)$ を e^{-pT} に置換すれば無損失の場合

0044



第6.3.2図 遅延導線方式

の基本式が得られる。即ち

$$F(p) = 2n_L \frac{p}{p+\alpha_s} \cdot \frac{n_r p + \alpha_r}{p+\alpha_r} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{\mu_s p + \alpha_s}{p+\alpha_s} \cdot \frac{\mu_r p + \alpha_r}{p+\alpha_r} \right]^v e^{-2v+1Tp}$$

$$\alpha_s = \frac{1}{R_s + W_0} \cdot \frac{1}{C_s}, \quad \alpha_r = \frac{1}{R_r + W_0} \cdot \frac{1}{C_r}$$

----- (6.3.9)

となる。

次に遅延導線及分圧線の場合に就て計算式を求め、然る後補償式の意味を行ふ。

6.3.2 遅延導線の変歪特性($f_1(t)$)

この場合は才6.2.3図の構成であり、整合を考慮すれば

$$\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r_L = W_0 \quad \text{即ち} \quad R_s = W_0$$

と取る可きである。この時 $\mu_s = 0$ となる。即ち才6.3.2図の如き等価回路に対し一般式(6.3.7)より

$$F_1(p) = \frac{p+\sigma}{p+\beta} \sum_{v=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma}{\beta}\right)^v \left(\frac{\beta}{p+\beta}\right)^v \zeta(p)^{2v+1} \dots (6.3.10)$$

を得る。之を演算するに $\zeta(p)$ が実験結果より得られるべき実を考慮し、之を原時間函数 $\xi(t)$ に保留すれば

$$f_1(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{\sigma}{\beta}\right)^v \frac{(\beta t)^v}{v!} e^{-\beta t} - \frac{\sigma}{\beta} \left(\sum_{k=0}^{v-1} \frac{(\beta t)^{v-k}}{(v-k)!} e^{-\beta t} \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - e^{-\beta t}) \right) \right] * \xi(t)^{*2v+1} \dots (6.3.11)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

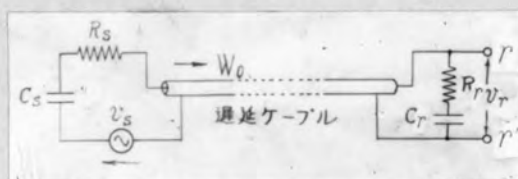
となる。相乗計算は図形的に容易に施行し得られる。若し減衰性を無視する時には(6.3.11)に於て、 σ を零、且つ $\xi(t)$ を $H(t-T)$ ならしめれば

$$f_1(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^v}{v!} e^{-\alpha t} * H(t - \overline{2v+1}T) \left. \vphantom{\sum_{v=0}^{\infty}} \right\} \dots (6.3.12)$$

$$\alpha = \frac{1}{2W_0 C_s}$$

となる。 $f_1(t)$ は導線としての変歪特性を與へるが、其の定常値を基準値1とする立場を取らず、入力端子電圧を基準値1に取る立場を採用すれば、 $1 - f_1(t)$ が変歪誤差率である。

0045



第6.3.3図 分圧線方式

6.3.3 遅延分圧線の変圧特性 ($f_2(t)$)

才6.2.4図の回路に於て、整合を考慮すれば、

$$\frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} + Y_L = W_0, \quad \text{即ち} \quad R_S = W_0, \text{ 及 } R_Y = W_0,$$

と選ぶ可きである。この時 $\mu_S = 0$, $\mu_Y = 0$ となる。次に C_S と C_Y の値は (6.3.7) 式の形より、急速制動として認められてある条件 $\beta_S = \beta_Y$ を満たす事とすれば、両者同値となる。依つて $C_S = C_Y$ と置けば分圧線としての分圧比は $1/2$ となる。才6.3.5図の如く等価回路を書き換へ、一般式 (6.3.7) より $F_2(p)$ を求めれば

$$F_2(p) = \frac{1}{2} \frac{(p+\sigma)(p+2\beta-\sigma)}{(p+\beta)^2} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\beta-\sigma}{(p+\beta)^2} \right]^{\nu} \cdot \zeta(p)^{2\nu+1}$$

$$\beta = \frac{1}{2W_0 C_S} + \frac{\sigma}{2} \quad \text{----- (6.3.13)}$$

となる。之を演算するに、前の場合と同じく、 $\zeta(p)$ に対し其の原時間函数を保有せしめれば、

$$f_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma}{\beta}\right)^{2\nu} \left[\frac{(\beta t)^{2\nu}}{2\nu!} \left(1 + \frac{\beta t}{2\nu+1}\right) \varepsilon^{-\beta t} - \frac{\sigma}{\beta} \left(2 - \frac{\sigma}{\beta}\right) \left\{ \sum_{k=0}^{2\nu} \frac{(\beta t)^{2\nu+1-k}}{(2\nu+1-k)!} \varepsilon^{-\beta t} - (1 - \varepsilon^{-\beta t}) \right\} \right] * \xi(t)^{*2\nu+1}$$

$$\text{----- (6.3.14)}$$

となる。

若し損失が無ければ、前回同様の省略を施し

$$f_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{2\nu}}{2\nu!} \left(1 + \frac{\alpha t}{2\nu+1}\right) \varepsilon^{-\alpha t} * H(t - 2\nu+1 T)$$

$$\text{----- (6.3.15)}$$

となる。前の場合と異り、この場合は分圧比が $1/2$ の分圧線として働いて居るから、変圧誤差率は $1 - 2f_2(t)$ である。

6.3.4 補償分圧線の構成方法

損失の無い場合に就て考慮を廻らす時に、最も基本的な結果が得られるから、斯かる場合を取扱ふ。

1) 一般に $\frac{1}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)}$ の被演算形 $y(t) = (K \pm \varepsilon^{-\alpha_1 t} \pm \varepsilon^{-\alpha_2 t}) \cdot H(t)$ に於て、 $\frac{\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2}$ が一定なる時、変数 t に対する $y(t)$ の最も急速な収斂は $\alpha = \alpha_2$ に於て得られる。

先づ (6.3.8) に対し、其の初期値及終局値を吟味する。

初期値は同式より明かに

$$f(0) = F(\infty) = 2n_l n_r \quad \text{-----} \quad (6.3.16)$$

となる。終局値を求める爲に (6.3.8) を変形し、次の如き形へ持来しめよう。

$$\begin{aligned} F(p) = & \frac{2n_l p \varepsilon^{-2Tp}}{[(1-n_l)p + \alpha_r][1 - \varepsilon^{-2Tp}] + n_l p [1 + \varepsilon^{-2Tp}]} \\ & \frac{[1 - \varepsilon^{-2Tp}]\{(1-n_l)(1-n_r)n_l n_r p^2 + [(1-n_l)\alpha_s + n_r \alpha_r]p + (1-n_r)n_l \alpha_s \alpha_r\}}{[1 - \varepsilon^{-2Tp}]\{(1-n_r)n_l[(1-n_r)n_l + (1-n_l)n_r]p^2 + [(1-n_l)\alpha_s + n_r \alpha_r]p + (1-n_r)n_l \alpha_s \alpha_r\}(1 - \varepsilon^{-2Tp})} \\ & + (1-n_r)n_l^2 p \{n_r p + \alpha_r\}[1 + \varepsilon^{-2Tp}] \\ & + (1-n_r)n_l p \{(1-n_l)(1-n_r) + n_l n_r\}p + (1-n_r)\alpha_s + n_l \alpha_r \} [1 + \varepsilon^{-2Tp}] \\ & \text{-----} \quad (6.3.17) \end{aligned}$$

然る後

$$\varepsilon^{-Tp} \cong 1 - Tp, \quad \text{及} \quad T = C_l W_0 \quad \text{-----} \quad (6.3.18)$$

なる條件及關係式を入れる。この場合の C_l は遅延線静電容量である。

$p \rightarrow 0$ ならしめた極限值を算定すれば、結局

$$f(\infty) = F(0) = \frac{C_s}{C_s + C_r + C_l} \equiv n_0 \quad \text{-----} \quad (6.3.19)$$

となる。(6.3.18) の關係を直接 (6.3.8) に入れては、(6.3.19) の結果は得られない。(6.3.19) の n_0 は結局分圧比を表示する。併し乍ら遅延線動作上の容量比として

$$n_s = \frac{C_s + C_r}{C_s + C_r + C_l} \quad \text{-----} \quad (6.3.20)$$

なる係数を取るのが設計上便利である。

補償分圧方式の根本原理とする處は、変圧特性の初期値と終局値とを一致せしめる事にある。即ち

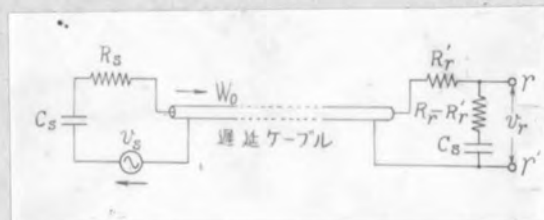
$$f(0) = f(\infty); \quad \text{或は} \quad 2n_l n_r = n_0 \quad \text{-----} \quad (6.3.21)$$

なる條件を作る事である。(6.3.21) の條件を満たす回路構成を列記すれば、

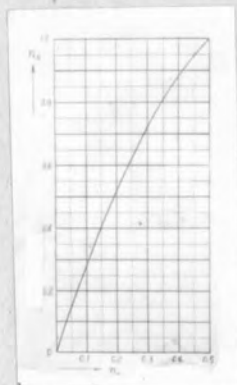
(i) 導線構成の場合

(非整合型遅延導線として構成し、6.3.4図に於て次の條件を採用する。)

$$\gamma_s = \frac{1 - n_0}{n_0} W_0 \quad \left(n_0 = \frac{C_s}{C_s + C_l} \right)$$



第6.3.4図 補償分圧線



第6.3.5図

(ii) 分圧線構成の場合

(非整合型遅延分圧線として構成し、図6.3.3図に於て、次の三種類の条件の内何れかを採用する。)

$$a. \quad R_s = \frac{1-n_0}{n_0} W_0, \quad R_r = W_0,$$

$$b. \quad R_s = W_0, \quad R_r = \frac{n_0}{1-n_0} W_0,$$

$$c. \quad R_s = \frac{1-n_1}{n_1} W_0, \quad R_r = \frac{n_2}{1-n_2} W_0, \quad (n_1, n_2 = n_0)$$

(iii) 整合型補償分圧線構成の場合

(図6.3.4図の如く構成し次の条件を採用する)

$$R_s = R_r = W_0, \quad R'_r = (1-2n_0) W_0$$

である。(i)及(ii)の両者は、何れも整合がより不完全となるから、急速制動を望む見地に及し好ましくない。(iii)-aの場合に類似する条件では、Bur-
ch氏が既に検討を行つて居るから、此處では(iii)-bに属する形式に対し精
細に検討し、最後の(iii)の条件の場合と比較吟味する。

6.3.5 非整合型補償分圧線の変歪特性 ($f_3(t)$)

図6.3.3図に於て(iii)-bの条件が成立する時、 C_s 及 C_r の値を選定する方針として、急速制動を行ふ見地より $\alpha_s = \alpha_r$ をらしめる条件を取る。然る時は、

$$C_r = 2(1-n_0)C_s, \quad \text{或は}$$

$$C_r = \frac{(C_s - C_\ell) + \sqrt{(C_s + C_\ell)^2 + 4C_s C_\ell}}{2} \quad \text{----- (6.3.22)}$$

の関係が生起する。総局分圧比 n_0 に対し働作係数 n_s を取り、其の間の関係を作れば

$$n_0 = \frac{3 - \sqrt{9 - 8n_s}}{4} \quad \text{----- (6.3.23)}$$

である。 $C_s + C_r$ を一定として扱へば $n_0 < n_s/2$ である。図6.3.5図に(6.3.23)の関係を示した。

(6.3.8)より分圧変歪特性の基本式を作れば

$$F_3(p) = \frac{p(n_0 p + \alpha)}{(p + \alpha)^2} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha(\mu p + \alpha)}{(p + \alpha)^2} \right]^v e^{-2v+1Tp}$$

$$\alpha = \frac{1}{2W_0 C_s} = \frac{1}{2T} \frac{C_\ell}{C_s}, \quad \mu = (2n_0 - 1)$$

$$\text{----- (6.3.24)}$$

之の演算結果は

$$f_3(t) = n_0 \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} (-1)^{\lambda-\nu} (1-2n_0)^{\lambda-\nu} [2(1-n_0)]^{\nu} \\ \frac{(\alpha t)^{\lambda+\nu}}{(\lambda+\nu)!} \left[1 + \frac{1-n_0}{n_0} \frac{\alpha t}{\lambda+\nu+1} \right] e^{-\alpha t} * \xi(t) * \overline{2\lambda+1} \dots (6.3.25) \\ \lambda=0, 1, 2, \dots$$

となる。

$$\alpha(t - \overline{2\lambda+1}T) \equiv \nu_{\lambda}, \quad \xi(t) \equiv H(t-T)$$

として、(6.3.25)を展開すれば次の如くなる。

$$f_3(t) = n_0 \left(1 + \frac{1-n_0}{n_0} \nu_0 \right) e^{-\nu_0} \cdot H(t) \\ - \left\{ (1-2n_0) \nu_1 + \frac{(1-n_0)(1-4n_0)}{n_0} \cdot \frac{\nu_1^2}{2} - \frac{(1-n_0)^2}{n_0} \cdot \frac{\nu_1^3}{3} \right\} e^{-\nu_1} H(t-2T) \\ + \left\{ (1-2n_0)^2 \frac{\nu_2^2}{2} + \frac{(1-n_0)(1-2n_0)(1-6n_0)}{n_0} \cdot \frac{\nu_2^3}{6} - \frac{(1-n_0)^2(1-3n_0)}{n_0} \cdot \frac{\nu_2^4}{6} \right. \\ \left. + \frac{(1-n_0)^3}{n_0} \cdot \frac{\nu_2^5}{30} \right\} e^{-\nu_2} H(t-2T) \\ - \left\{ (1-2n_0)^3 \frac{\nu_3^3}{6} + \frac{(1-2n_0)^2(1-n_0)(1-8n_0)}{n_0} \cdot \frac{\nu_3^4}{24} - \frac{(1-n_0)^2(1-2n_0)(1-4n_0)}{n_0} \cdot \frac{\nu_3^5}{20} \right. \\ \left. + \frac{(1-n_0)^3(3-8n_0)}{n_0} \cdot \frac{\nu_3^6}{180} - \frac{(1-n_0)^4}{n_0} \cdot \frac{\nu_3^7}{630} \right\} e^{-\nu_3} H(t-3T) \\ + \left\{ (1-2n_0)^4 \frac{\nu_4^4}{24} + \frac{(1-2n_0)^3(1-n_0)(1-10n_0)}{n_0} \cdot \frac{\nu_4^5}{120} \right. \\ \left. - \frac{(1-2n_0)^2(1-n_0)^2(1-5n_0)}{n_0} \cdot \frac{\nu_4^6}{90} + \frac{(1-2n_0)(1-n_0)^3(3-10n_0)}{n_0} \cdot \frac{\nu_4^7}{630} \right. \\ \left. - \frac{(1-n_0)^4(3-5n_0)}{n_0} \cdot \frac{\nu_4^8}{5040} + \frac{(1-n_0)^5}{n_0} \cdot \frac{\nu_4^9}{22680} \right\} e^{-\nu_4} H(t-4T) \\ \dots \dots \dots (6.3.26)$$

$f_3(t)$ は変歪を示して居るが、結局分圧比が n_0 であるから

$$1 - \frac{1}{n_0} f_3(t)$$

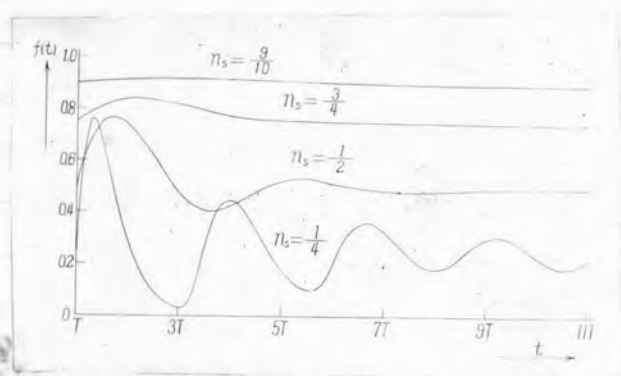
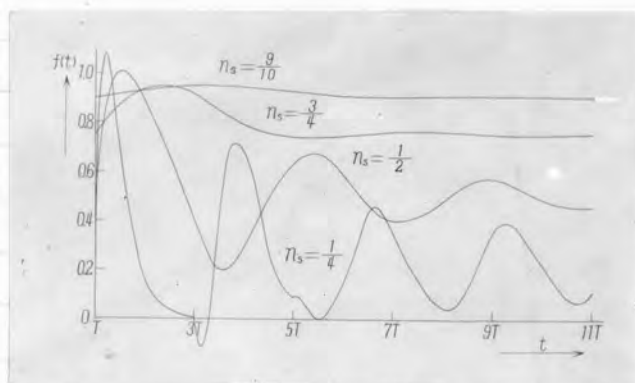
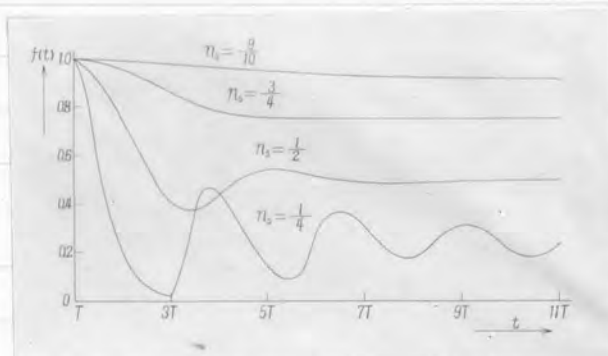
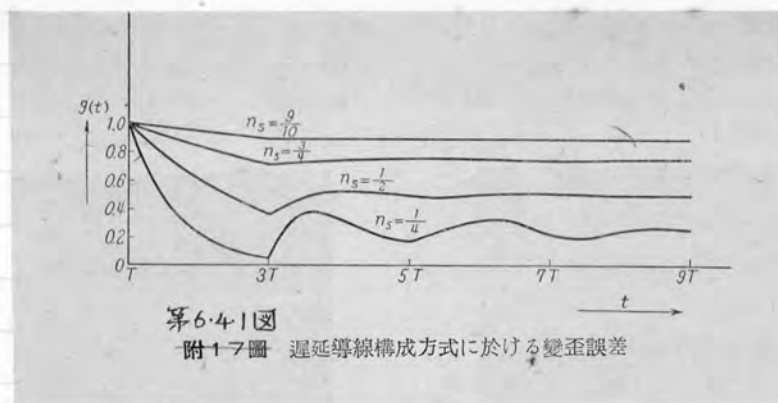
が其の変歪誤差率を與へる。此の誤差率の初期値及終局値は各零である。

(6.3.26)の数値計算を行った結果は後に示す。

6.3.6 整合型補償分圧線の変歪特性 ($f_4(t)$)

第6.3.4図の構成に対する基本分圧式は、終端インピーダンスの電圧比を $F_2(p)$ に表すれば得られる。

$$F_4(p) = \frac{n_0 p + 2\alpha}{p + 2\alpha} \cdot F_2(p) \dots \dots \dots (6.3.27)$$



となる。この演算結果は

$$f_4(t) = [1 - (1 - \eta_s) e^{-2\lambda t}] * f_2(t) \text{ ----- (6.3.20)}$$

である。この分圧線を利用する場合が、変歪を小さくしめる見地より最も有利である事は後の数値計算に於て実証される如くである。

6.4 数値計算

遅延導線の変歪計算を基準に取り、同一パラメータに於て、各種回路構成の変歪特性を指示し、図面比較を行ふ事とする。

パラメータとして η_s を選ぶ

$$\eta_s = 9/10, 3/4, 1/2, 1/4$$

なる四種類の場合を計算する。

(i) 遅延導線

★ 6.3.2 図の回路に対する (6.3.12) を計算した結果得た変歪特性

$$f(t) = f_1(t)$$

を★ 6.4.1 図に示す。

(ii) 遅延分圧線

★ 6.3.3 図の回路に於て、 $R_r = R_s = W_0$ の条件に対する (6.3.15) で計算した変歪特性を

$$f(t) = 2f_2(t)$$

で表示し★ 6.4.2 図に之を示す。

(iii) 非整合型補償分圧線

★ 6.3.5 図の回路に於て、 $R_s = W$, $R_r = \frac{\eta_0}{1 - \eta_0} W_0$ の条件に対する (6.3.23) で計算した変歪特性


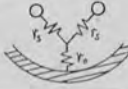
$$f(t) = \frac{\eta_s}{\eta_0} f_3(t)$$

を★ 6.4.3 図に示す。本計算で η_s と η_0 の関係は★ 6.3.7 図で分明である。

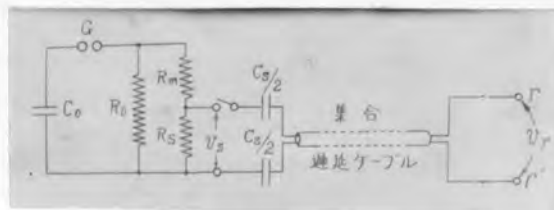
斯くの如き複雑な係数を求めた理由は遅延導線の場合との比較を同一形態で行はんとしたものである。

(iv) 整合型補償分圧線

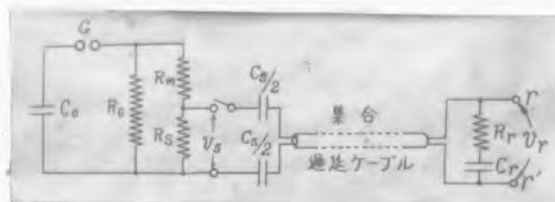
★ 6.3.4 図の回路に於て、 $R_s = R_r = W_0$, $R_r' = (1 - 2\eta_0) W_0$ とした場合 (6.3.28) で計算した変歪特性

静電容量 (ケーブル全長)		$C_0 = 0.0278 \mu\text{F}$ $G_0 = 0.141$
波動抵抗 (端子間見掛値)		$r_0 = 75.5 \Omega$ $g_0 = 19 \Omega$
其、他	ケーブル実長	500 米
	波動傳播時間	$2.05 \mu\text{s}$

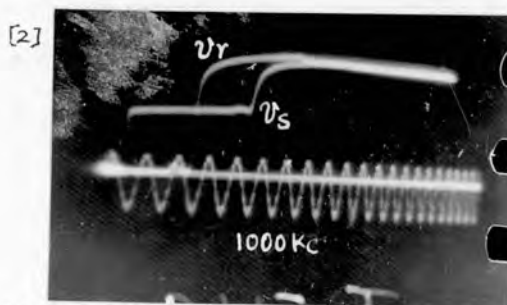
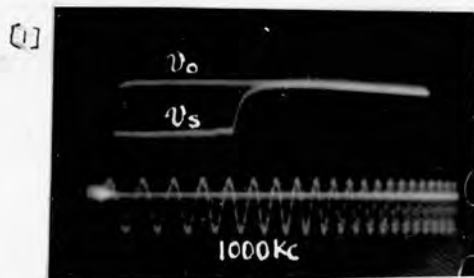
6.5.1
第 1 表 二心特殊ケーブル各種定数



第 6.5.1 図 導線型構成に等価する実験回路



第 6.5.2 図 分圧線型構成に等価する実験回路

第 6.5.3 図 供試ケーブルの波動インピーダンス及
映像電圧比の特性

$$f(t) = 2f_4(t)$$

をオ6.3.4図に示す。

6.5 実験的検討

前記の数値計算は、損失の無い場合の結果である。実際の損失ある遅延線に対しては、其の波動インピーダンス及影像電圧比の観測を実施し、夫等の測定値を計算式へ導入して数値計算を実施する時には、実験によって得る検討結果と同一の結果に到達する筈である。

次に数種の條件に於ける変遷特性の実測オシログラムを展示し実際状態を吟味とする。

(i) 供試ケーブル及実験回路

実験に使用した遅延ケーブルはオ6.5.1表の如き定数値を有するものである。実験回路はオ6.5.1図及オ6.5.2図の如く構成した。

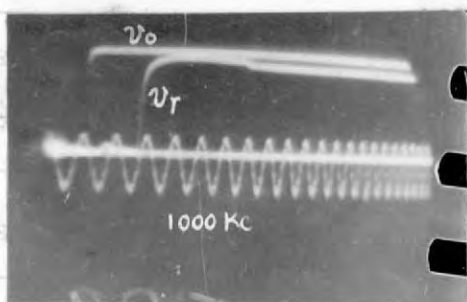
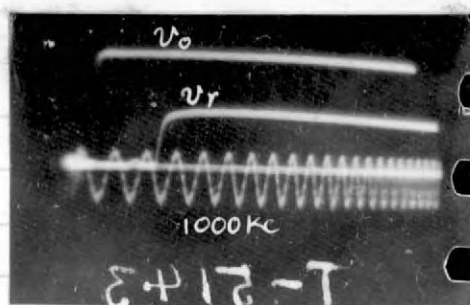
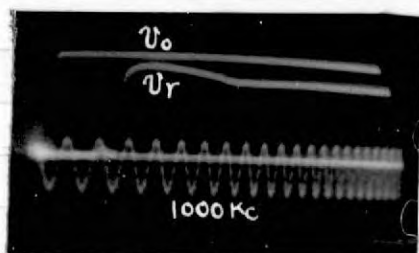
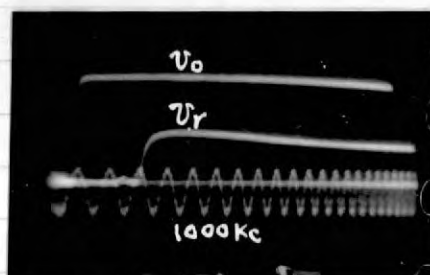
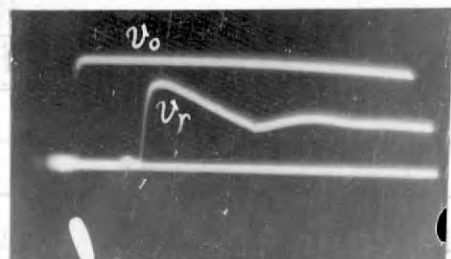
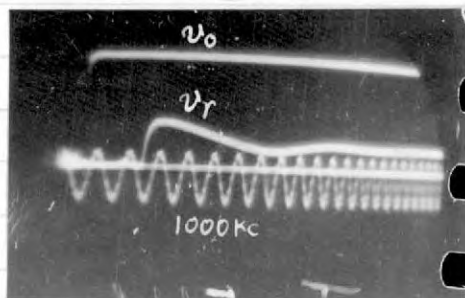
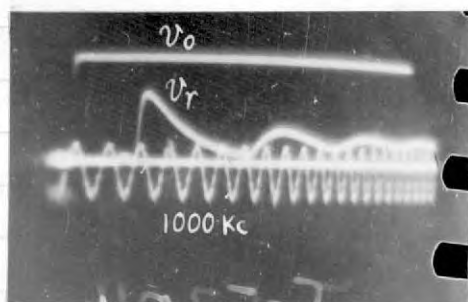
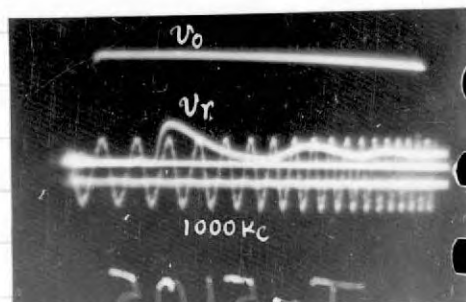
この場合の C_0 は $4\mu F$ の主蓄電器、 G は放電間隙、 R_0 は $3K\Omega$ の放電抵抗、 R_s は遅延ケーブルの初期波動インピーダンスに略相等しい 150Ω の抵抗、 R_m は $3K\Omega$ の直列抵抗である。 C_s は送端静電容量であり、可変とする。

R_r 及 C_r は、分圧線とする場合に挿入する抵抗及静電容量である。之等の回路の電氣的等価性は、オ6.3.2図及オ6.3.3図のものと同等であることは勿論である。 v_0 を以てケーブル入力端を開放した場合の $I \cdot G$ の出力電圧 v_s をケーブル接続時の夫とし、この時のケーブルの出力端電圧を v_r とする。全回路構成及測定方法はオー京大法に外ならない。

先づ使用ケーブルの波動インピーダンス及影像電圧比を観察するため、オ6.5.1図に於て $C_s = \infty$ の状態とし、 v_0 , v_s 及 v_r を測定した結果オ6.5.3図[1][2]のオシログラムに示す如くなった。波動インピーダンスの変化は緩徐で、且つ電圧比の定常化が早いので、反射波到達迄の期間内の観察で、殆んど $W(t)$ 及 $\xi(t)$ が決定可能と見られる。

(ii) 導線構成の場合の変遷特性

オ6.5.1図の実験回路で $C_s = 0.005, 0.01, 0.05, 0.1 \mu F$ の四種類、即ち $\eta_s = 0.27, 0.43, 0.78, 0.88$ に取った場合のオシログラムを示せばオ6.5.4図の如くなる。 $I \cdot G$ の出力側から見た内部抵抗が 150Ω を約 $1/20$ 下る為、整合不足で、負反射を若干生じて居る。電圧比の変遷の爲 v_r の初期値附近に起る極大値は、 v_0 に連しない。 C_s が $0.005 \mu F$ に於ては、損失無視の計算曲線と相当の距りを生ずる事が判る。

[1] $C_s = 0.1 \mu F$ [1] $C_s = 0.05 MF$ [2] $C_s = 0.05 MF$ [2] $C_s = 0.025 MF$ [3] $C_s = 0.01 \mu F$ [3] $C_s = 0.005 MF$ [4] $C_s = 0.005 MF$ [4] $C_s = 0.0025 MF$

第6.5.4图 延迟导線

第6.5.5图 延迟分压線

(iii) 分圧線構成の場合

才6.5.2図の回路に於て、 $R_r=150\Omega$, $C_s=C_r$ とし、この値を0.0025, 0.005, 0.025, 0.05 μF の四種類に変更した場合のオシログラムを示せば才6.5.5図の如くである。この場合の分圧比 $1/2$ を考慮に入れて、変歪状態を観察すれば、才6.4.2図の計算曲線と相似の結果を生じて居ることが判る。両者を比較するに C_s が小なる部分では計算値よりも實際は振動が早く減衰し、又 C_s が大なる部分では減衰無視の理論的計算で現れる初期値附近の極大値が、全然消失し、むしろ、電圧比歪曲の性質で低く出ることが判明する。

6.6 結 言

容量分圧器に結合する遅延線の変歪誤差は、遅延線静電容量 C_d が、分圧器静電容量 C_s+C_r に比し、肉却出来ぬ時に起る。其の変歪の定常値は $\eta_s = (C_s+C_r)/(C_s+C_r+C_d)$ であつて、 $\eta_s=9/10$ では過渡的部分は大きな問題を呈せし、特に補償方式を取れば殆んど問題とならぬ程度である。 $\eta_s=3/4$ 程度で過渡部分は大きくなり、 $\eta_s=1/2$ 以下では変歪は振動性を帯び、特別を対策なしでは、使用不可の状態となる。

本章に於ては、最初ケーブルの波動インピーダンスが直線状上昇形となる典型的場合を祖上に、遅延導線及分圧線の変歪特性の理論式を誘導し、後に補償法を考案した。本章の計算式は映像電圧比が決定すれば、現象演算にて直ちに精算し得る形式を併せてある。遅延線が無損失の場合、導線分圧線、非整合型補償、整合型補償分圧線 各四種類の積欠状態に対し、 $\eta_s=0.25, 0.5, 0.75, 0.9$ 四個のパラメーターを以て数値計算を実施し、各方式の変歪特性を明かならしめた。その姿態より整合型分圧線が最優の特性を有する事が明瞭となる。

次にケーブルが損失を有する場合の實際的吟味として、実験的検討を附し、減衰性が大なる為に起る変歪の特徴を明白にした。其の結果減衰性の大なるケーブルでは、 η_s が1に近い場合 殆んど補償方式を考慮する必要が無い事が判明した。

第 VII 章 京大型新遅延線方式の研究

7.1 緒 言

通常遅延線として用いられる線路は、低損失ケーブルであつて、高周波中空同軸ケーブルの如きが、或は之と同等構造のものが常用されてゐる。

併し乍ら、之等の價格が高價なる丁及び製作困難等の爲に、電力用ケーブル或は電話用熱ケーブルの如きものを用ひる事があるが特性は良くない。

即ち減衰損失が大である爲に、測定波が変歪し相当の誤差を惹起する。

其の起因は専ら誘電体損失であつて、之に若干の導体抵抗損失が加はつて、影像電圧比が歪曲することになり、尚波動インピーダンスの完全な整合状態が得られぬ爲に起る反射変歪も加はるものと思はれる。何れにせよ斯様な遅延線を使用すると、形態が尨大且つ重量大である爲に、運搬、搬付等の取扱が甚だしく不便である。この矣に対し可搬的に製作する目的で細小な可撓遮蔽線を所要長束ねて遅延線を形成した例¹⁾もあるが、其の特性は甚だ良くない様である。

従來の遅延線は斯くの如き不便さに於て慣用されて來たのであつたが、構造方式に劃期的な進展を與へる先人の考案は発表されて居ない様である。

本章に於ては京大型遅延線乃至新遅延線と簡稱するに至つた新しい一つの遅延線構造方式に就て、其の原理的考案と之に対する理論的検討及實際的製作例と其の實驗的検討とを行ふ事とする。理論的検討は特に表皮作用の影響に就て吟味し實際計算にも便ならしむべく、影像電圧比及波動インピーダンスの変歪状況を數多くのパラメーターの下に數値計算する。そのパラメーターとしては特に一般性のある定數を算出し、この結果遅延線導体の寸法、固有抵抗に關係無く変歪誤差を決定せしめる事を図る。尚實際に製作した構造方式及實驗結果を二例紹介し、この方式の電氣的特性の面、他の面、即ち低價格、少資材、可搬性等の面に於ける優劣性を明白にする。

尚本章に実施する理論的計算は、觀測函數利用の立場を取らず、一般に行はれる分布定數線路としての回路表示を使用し演算子函數を以て施行する。

7.2 原 理

1) A. M. Angelini : A.S.E. 32 14 305 (18 Juillet 1941)⁽²⁸⁾

従来の遅延線が減衰性を小さくしむべく配慮してみた立場を捨て去り、減衰性を持たせても、分圧線として利用する如くに考察したのが根本的な違いである。即ち線路導体には極力細い電線を使用し、重量の低減を図る。而して導体抵抗の増大に起因する変位は $CR=LG$ をヘビサイドの無歪条件を満す如く漏洩コンダクタンスを配布し回避を図るものである。

この時線路はケーブル方式又は架空線式の内何れが便宜の方式を決定するが、誘電体損失を極力回避する様に導体の機械的支持を考慮する必要がある。而して導体を細くすると一定の占有容積内では、波動インピーダンスが増大するので、之は附帶的な利益となる。

無歪条件を採用した線路の影像電圧比 $\Gamma(p)$, $\xi(t)$ 及び波動インピーダンス $W(p)$, $w(t)$ は通常に行はれる C, R, L, G 分布定数線路の計算に従へば、

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(p) &= e^{-\sqrt{(R+Lp)(G+Cp)}l} = e^{-\frac{R}{W_0}l} \cdot e^{-\frac{L}{C}p} \\ \xi(t) &= e^{-\frac{R}{W_0}l} \cdot H(t-T) \\ W(p) &= \sqrt{\frac{R+Lp}{G+Cp}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = W_0 \\ w(t) &= W_0 \end{aligned} \right\} \text{-----}(7.2.1)$$

更に $f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $T = \frac{l}{f}$

となる。之等の値は時間が相当な経過を取つた後に現はれる数値である。

この線路への整合は抵抗を以て遂行出来る形である。併し遅延回路を構成する場合に、之が導線構成でも、他の分圧線構成であつても、この線路は抵抗分圧線として動作するから、注意を拂はねばならない。

7.3 表皮作用に対する検討

7.3.1 影像電圧比及波動インピーダンスに対する一般的基本式及解式

原理より明かな如く、京大型遅延線は一つの高減衰分布定数線路である。處が斯様な線路では、導体表皮作用の影響が著しく出現する可能性がある。と推定されるので、之に対する吟味が必要となつて来る。即ちこの表皮作用が存在すると、たとへ、無歪条件を満す補償線路を造つても、矩形波として伝播する等の電位波が、實際は波頭が丸くなつて伝播するのである。即ち、波頭変歪誤差を生起する。

漏洩コンダクタンスが無い線路に対し表皮作用の影響を算入した影像電圧比の漸近級数解の基礎形は H. Pleijel 氏により書かれ¹⁾ 一層精密な解式²⁾ Pleijel: Teknisk Tidskrift (E) 48 (1918)¹⁹⁾ 及 K. Wagner: Operatorenrechnung (1940)¹⁹⁾

は、之と全然独立して林重憲博士に依り與へられてゐる。¹⁾ 然し乍らパラメーターに一般性が缺ける事と、係数の算出が正確で無い事等に兩者多少の憾みがある。此処では次の如く、漏洩の存在する線路と、補償線路及無漏洩線路の三種に対し、漸近級数解の正確な算定を行ふ。

一般に知られる如く、半径 r cm, 固有抵抗 ρ Ω cm, 導磁率 μ を有する円形断面導体の断面部分のみの軸方向インピーダンス $Z_i(p)$ は

$$Z_i(p) = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{4\pi\mu\rho}{C_R}} p \cdot \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{4\pi\mu\rho}{C_R}} p \cdot r\right)}{I_1\left(\sqrt{\frac{4\pi\mu\rho}{C_R}} p \cdot r\right)} \quad \text{----- (7.3.1)}$$

$$C_R = 3 \times 10^{-9} \Omega / \text{emu}$$

である。表現を簡潔にする爲、半径 r を脱落させ

$$\frac{\rho}{\pi r^2} = R \quad \Omega / \text{cm}, \quad \sqrt{\frac{4\mu}{C_R}} = S \quad \text{----- (7.3.1')}$$

とする時は

$$Z_i(p) = \frac{R}{2} S \sqrt{\frac{p}{R}} \cdot \frac{I_0\left(S \sqrt{\frac{p}{R}}\right)}{I_1\left(S \sqrt{\frac{p}{R}}\right)} \quad \text{----- (7.3.2)}$$

となる。故に線路長 l 離隔点の影像電圧比は

$$\square(p) = e^{-\sqrt{[Z_i(p) + L_0 p](G + C_p)} l} \equiv e^{-\Gamma(p) l} \quad \text{----- (7.3.3)}$$

波動インピーダンスは

$$W(p) = \sqrt{\frac{Z_i(p) + L_0 p}{G + C_p}} \quad \text{----- (7.3.4)}$$

となる。 p が大なる場合に (7.3.2) は漸近展開を適用することができる。

p が小なる場合に $Z_i(p)$ は R に収斂し、前節に記した結果と一致する。

記法を更に簡潔にする爲

$$\frac{R}{L_0} = R\lambda_a, \quad \frac{G}{C} = R\lambda_b \quad \text{----- (7.3.5)}$$

と置く。この場合

$$\lambda_a = \frac{g}{W_0}, \quad \lambda_b = \frac{G}{R} \frac{1}{W_0} \quad \text{----- (7.3.5')}$$

である。然る時には

$$\Gamma(p) = \frac{l}{g} p \sqrt{1 + \lambda_a \frac{S}{2} \sqrt{\frac{R}{p}} \frac{I_0\left(S \sqrt{\frac{p}{R}}\right)}{I_1\left(S \sqrt{\frac{p}{R}}\right)} + \lambda_b \frac{R}{p}}$$

1) 林: 電学誌 57.586 (昭12)⁽³⁰⁾ p362

$$+ \lambda_a \lambda_b \frac{S}{2} \sqrt{\left(\frac{P}{R}\right)^3} \frac{I_0(S\sqrt{\frac{P}{R}})}{I_0'(S\sqrt{\frac{P}{R}})} \dots\dots\dots (7.3.6)$$

となる。根号内オ二項以下がオ一項に比し小さい値を取る領域を取扱ふ事とし $\Gamma(p)$ を展開すれば

$$\Gamma(p) = \vartheta^2 [1 + r_1 \vartheta^{-1} + r_2 \vartheta^{-2} + r_3 \vartheta^{-3} + r_4 \vartheta^{-4} + \dots] \dots\dots (7.3.7)$$

此処に

$$\vartheta = \sqrt{pT}$$

$$r_1 = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{T_R}{S^2}}$$

$$r_2 = \frac{a}{32} (4 + 16 \frac{b}{a} - a) \frac{T_R}{S^2}$$

$$r_3 = \frac{a}{32} (3 - a + 4b + \frac{a^2}{4}) \sqrt{\left(\frac{T_R}{S^2}\right)^3}$$

$$r_4 = \frac{a}{32} (3 - a + 2b - 4 \frac{b^2}{a} - \frac{ab}{2} + \frac{3}{8} a^2 - \frac{5}{64} a^3) \left(\frac{T_R}{S^2}\right)^2$$

$$T_R = RT, \quad a = S^2 \lambda_a, \quad b = S^2 \lambda_b$$

$$\dots\dots\dots (7.3.7)'$$

である。オ三項迄を完全に採用しオ四項 r_4 の一部を利用した $\Gamma(p)$ の解は

$$\nu = \frac{t - T}{T} \dots\dots\dots (7.3.7)''$$

と置けば次の如くなる。

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \varepsilon^{-\frac{r_2}{\nu}} \left[(1 + r_1 r_3) \left(1 - \operatorname{erf} \frac{r_1}{2\sqrt{\nu}} \right) - 2r_3 \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \varepsilon^{-\frac{r_1^2}{4\nu}} \right. \\ & \left. - r_4 \left(\nu - \int_0^\nu \operatorname{erf} \frac{r_1}{2\sqrt{\tau}} d\tau \right) + \dots \right] H(\nu) \dots\dots (7.3.8) \end{aligned}$$

次に波動インピーダンスは同様に展開を施行し

$$W(p) = W_0 [1 + p_1 \vartheta^{-1} + p_2 \vartheta^{-2} + p_3 \vartheta^{-3} + p_4 \vartheta^{-4} + \dots] \dots\dots (7.3.9)$$

此処に

$$p_1 = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{T_R}{S^2}}$$

$$p_2 = \frac{a}{32} [4 - 16 \frac{b}{a} - a] \frac{T_R}{S^2}$$

$$p_3 = \frac{a}{32} [3 - a - 4b + \frac{a^2}{4}] \sqrt{\left(\frac{T_R}{S^2}\right)^3}$$

$$p_4 = \frac{a}{32} [3 - a - 2b + 12 \frac{b^2}{a} + \frac{ab}{2} + \frac{3}{8} a^2 - \frac{5}{64} a^3] \left(\frac{T_R}{S^2}\right)^2$$

$$\dots\dots\dots (7.3.9)'$$

之より

$$\bar{v} = \frac{t}{T} \quad \text{-----} (7.3.9)''$$

と置き $W(p)$ を時間函数に変換すれば

$$w(t) = W_0 \left[1 + \frac{2\sqrt{\bar{v}}}{\sqrt{\pi}} \left(p_1 + \frac{1}{2} p_2 \bar{v} + \frac{3}{4} p_3 \bar{v}^2 + \frac{15}{8} p_4 \bar{v}^3 + \dots \right) \right] \quad \text{-----} (7.3.10)$$

となる。次に各方式の吟味を行ふ。

7.3.2 変正補償線路の解式

京大型新遅延線方式とする目的にて

$$CR = L_0 G$$

なる条件を採用する。然るときはパラメータ λ_a, λ_b を

$$\lambda_a = \lambda_b = \lambda \quad \text{-----} (7.3.11)$$

と置く事が出来る。この場合 $\lambda = g/W_0$ の関係にある事に注意する。(7.3.11)より、影像電圧比の一般解式(7.3.8)の係数は次の如くなる。

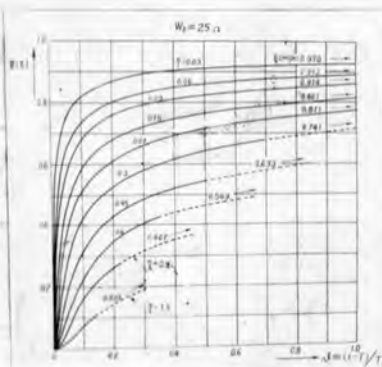
$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{S^2 \lambda}{4} \sqrt{\frac{T_R}{S^2}} \\ \gamma_2 &= \frac{S^2 \lambda}{32} (20 - S^2 \lambda) \frac{T_R}{S^2} \\ \gamma_3 &= \frac{S^2 \lambda}{32} \left(3 + 3S^2 \lambda + \frac{S^4 \lambda}{4} \right) \sqrt{\left(\frac{T_R}{S^2} \right)^3} \\ \gamma_4 &= \frac{S^2 \lambda}{32} \left(3 - 3S^2 \lambda - \frac{1}{8} S^4 \lambda^2 - \frac{5}{64} S^6 \lambda^3 \right) \left(\frac{T_R}{S^2} \right)^2 \end{aligned} \quad \text{-----} (7.3.12)$$

他方波動インピーダンスは同様な条件を入れて(7.3.9)の各係数を決定して

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{S^2 \lambda}{4} \sqrt{\frac{T_R}{S^2}} \\ p_2 &= -\frac{S^2 \lambda}{32} (12 + S^2 \lambda) \frac{T_R}{S^2} \\ p_3 &= \frac{S^2 \lambda}{32} \left(3 - 5S^2 \lambda + \frac{S^4 \lambda^2}{4} \right) \sqrt{\left(\frac{T_R}{S^2} \right)^3} \\ p_4 &= \frac{S^2 \lambda}{32} \left(3 - 9S^2 \lambda + \frac{7}{8} S^4 \lambda^2 - \frac{5}{64} S^6 \lambda^3 \right) \left(\frac{T_R}{S^2} \right)^2 \end{aligned} \quad \text{-----} (7.3.13)$$

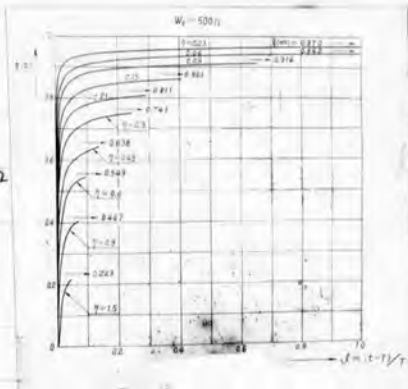
[1]

$$W_0 = 25 \Omega$$



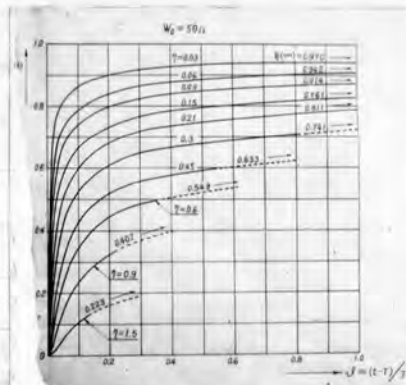
[5]

$$W_0 = 500 \Omega$$



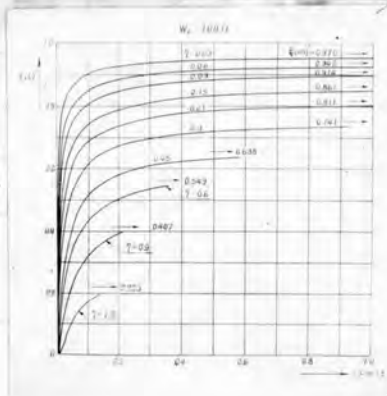
[2]

$$W_0 = 50 \Omega$$



[3]

$$W_0 = 100 \Omega$$



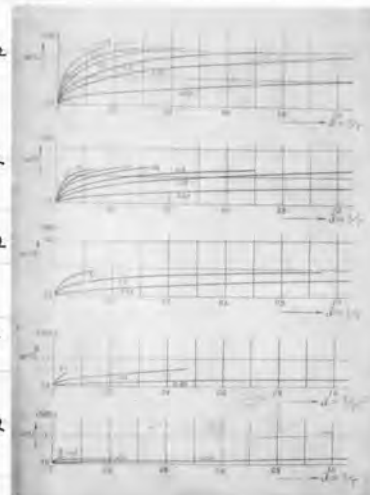
$$W_0 = 25 \Omega$$

$$W_0 = 50 \Omega$$

$$W_0 = 100 \Omega$$

$$W_0 = 250 \Omega$$

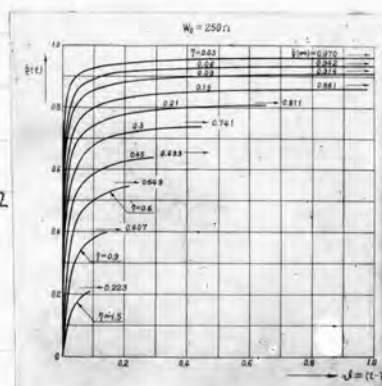
$$W_0 = 500 \Omega$$



第7.4.2図 波動インピーダンス

[4]

$$W_0 = 250 \Omega$$



第7.4.1図 映像電圧比

となる。之を(7.3.11)に入れて $w(t)$ の値を決定出来る。

7.3.3 無補償線路の解式

漏洩抵抗を除去した場合の考察は通常構造の遅延線乃至測定線に対する波頭変位誤差を吟味する上に於て必要である。この場合 $G=0$ であるから、

$$\lambda_a = \lambda, \quad \lambda_b = 0 \quad \text{----- (7.3.14)}$$

なる条件となる。故に(7.3.7)'の各係数は

$$r_1 = \frac{S^2 \lambda}{4} \sqrt{\frac{T_R}{S^2}}$$

$$r_2 = \frac{S^2 \lambda}{32} (4 - S^2 \lambda) \frac{T_R}{S^2}$$

$$r_3 = \frac{S^2 \lambda}{32} \left(3 - S^2 \lambda + \frac{S^4 \lambda^2}{4} \right) \sqrt{\left(\frac{T_R}{S^2} \right)^3}$$

$$r_4 = \frac{S^2 \lambda}{32} \left(3 - S^2 \lambda + \frac{3}{8} S^4 \lambda^2 - \frac{5}{64} S^6 \lambda^3 \right) \left(\frac{T_R}{S^2} \right)^2$$

$$\text{----- (7.3.15)}$$

となる。

之を(7.3.8)に入れて、影像電圧比 $\xi(t)$ を決定することが出来る。他方波動インピーダンスは同様な条件を入れる時は(7.3.9)'の各係数は(7.3.15)と一致する。即ち

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= r_1 \\ \rho_2 &= r_2 \\ \rho_3 &= r_3 \\ \rho_4 &= r_4 \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (7.3.16)}$$

となる。(7.3.10)より $w(t)$ を決定出来る。

7.4 影像電圧比及波動インピーダンスの数値計算

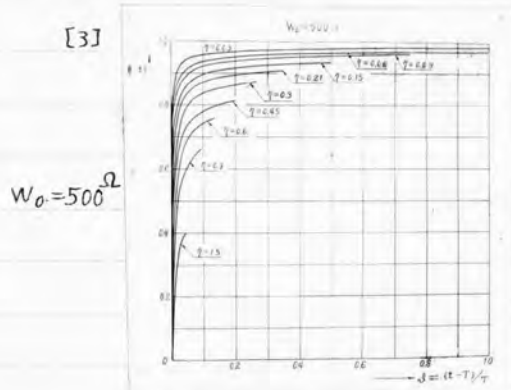
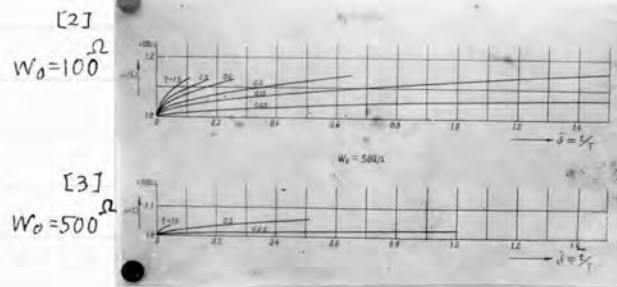
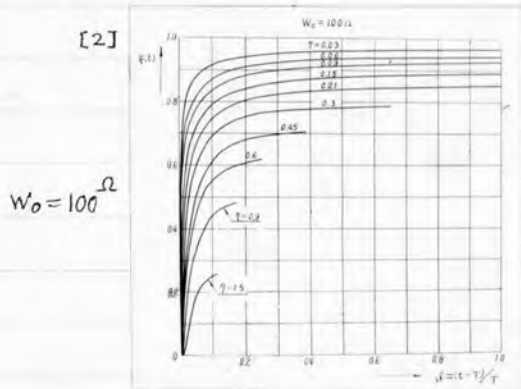
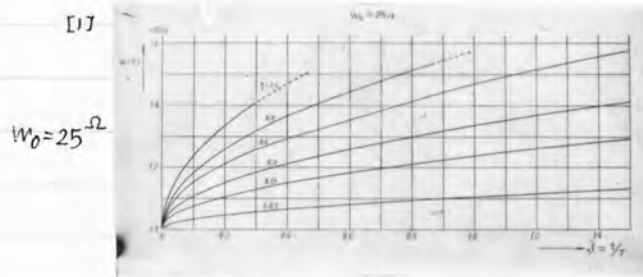
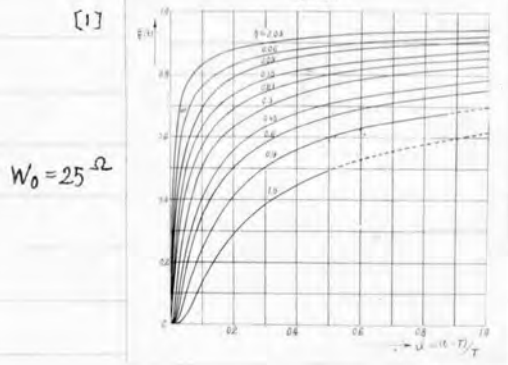
7.4.1 補償線路の場合

京大型新遅延線の設計に便をらしめる目的で、若干のパラメーターを選定し補償線路及非補償線路に就て数値計算を施行した。採用したパラメーターは実用上の利便を考慮した結果

$$\eta = \frac{Rl}{W_0}, \quad W_0, \quad f$$

の三者とする。斯かる三者により導線の太さ固有抵抗に無関係に計算を遂行出来る。

誘電体損失を避ける見地から、空気絶縁を主体とした線路構造にすれば



第7.4.4図 波動インピーダンス

第7.4.3図 映像電圧比

事実上 β は光速に一致する。故にパラメーターが一個脱落する。 μ は当然1に取る。然る時 $S^2=4 \times 10^{-9}$ の値を取る。

W_0 として実際の数値

$$W_0 = 25\Omega, 50\Omega, 100\Omega, 250\Omega, 500\Omega$$

の五者を採用し η として

$$\eta = 0.03, 0.09, 0.15, 0.21, 0.3, 0.45, 0.6, 0.9, 1.5$$

の九者を取った場合に就て計算を遂行した。

其の結果は、映像電圧比 $\xi(t)$ に対してはオ7.4.1図 [1] ~ [5] に示すが如き結果が、他方波動インピーダンス $w(t)$ は第7.4.2図 [1] ~ [5] に示す如き曲線が得られる。

各図に於て波頭部分の一部しか描示してゐない曲線は、解式の漸近性が悪く、採録末項の及ぼす最大誤差率が概ね1.5%見当以下に収まるよう時間領域を撰定したものである。但しこの領域を出ても算定誤差が急激に大きくなりぬものは、実線にて若干曲線を延長した。

オ7.4.1図 $\xi(t)$ 曲線の末端に記した数値は定常状態に於ける巨欠電圧比の数値を示し各曲線はこの値へ漸近する筈である。波動インピーダンス $w(t)$ は、巨欠状態に於て、基準値 W_0 に到達する筈であるが、解式の近似度を前記数値以下に抑へる時間領域では重調上昇函数である。然し各曲線の末端附近は極大値の近傍であらうと思はれる。總体に η が大となるほど近似度が悪くなる。

各図を觀察して判明することは、波動インピーダンスの大きい線路程同一の η に対し相対的に変遷が小となる丁である。即ち W_0 を大きく選定することは新遷延線設計上の要項であると考えられる。

7.4.2 無補償線路の場合

補償線路の場合と同一パラメーターで無補償線路の映像電圧比及波動インピーダンスを計算し両者を比較することは、新遷延線の有利性を実証する上に於て、重要な事項である。夫故

$$W_0 = 25\Omega, 100\Omega, 500\Omega$$

より代表的三者を選定して同一の η について同様の計算を施行した。其の結果はオ7.4.3図 [1] ~ [3] 及第7.4.4図に示す如くである。算定の近似度は前項同様である。

図に於て $\xi(t)$ は巨欠状態に於て1に漸近し $w(t)$ は無限大となる筈である。

之等の各曲線を同一条件における補償線路の夫と比較するならば明かに変遷の時間的経過は後者が遙かに優越してゐることが着取される。その傾

向は W_0 の小なる程、 η が大なる程強い。

7.5 遅延導線の形式とせる場合の変歪特性

補償線路を形成しても、表皮作用により、波動インピーダンス及映像電圧比が、定数とをらぬ爲に変歪誤差を発生する。其の計算は $w(t)$ 及 $\xi(t)$ が既に図形的に與へられたるが故、現象演算を施行することが出来る。今才7.5.1図の如く導線構成の分田線とした時に就て変歪の動向を考へるに、 $w(t)$ は、時間と共に一時増大する性質がある事より推し入端電圧は最初一時的上昇を来す事が期待される。然るに他方 $\xi(t)$ の性質は定常値に達するに遅れたる有様であるから、斯様を現象は表皮作用の変歪を低減する如く働く事が期待できる。この事に着目し實際計算の一例を紹介する事とする。

実例に取り上げた遅延線は京都大学に於て最初に試作せられたものであつて、次の諸元を有する。即ち使用導線は直径 0.32 mm の軟銅線で之を厚い平面導板上に高さ 3 mm に架張し全長を 235 m とする。然る時導線全長の抵抗は 51.4Ω 、波動インピーダンス初期値 218Ω と算出せられる。

空中架設であるから波動伝播速度は光速と見る。補償状態に於て、前節の計算に依つて求めた $w(t)/W_0$ 及 $\xi(t)$ の $0 \leq \eta \leq 0.3$ 領域の値は才7.5.2図に記入せる如くする。之等の計算結果は $\eta \leq 0.3$ の近傍で 0.4% 以下の近似度を保証されるものである。

才7.5.1図に於て、終端電圧を $v_r(t)$ 、入端電圧を $v_s(t)$ とし、被測源電圧を $V_0 \cdot H(t)$ とする。然る時

$$\frac{v_s(t)}{V_0} = \frac{w(t)}{W_0 + w(t)} \quad \text{----- (7.5.1)}$$

$$W_0 = w(0)$$

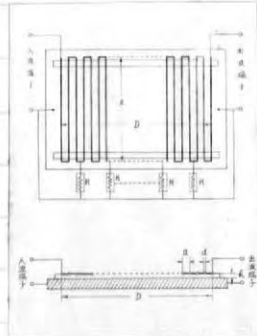
$|w(t) - W_0|/2W_0$ は高々 0.042 であるから次の展開が成立する。

$$\frac{v_s(t)}{V_0} = \frac{1}{2} \frac{w(t)}{W_0} * \left[1 - \frac{w(t) - W_0}{2W_0} + \left(\frac{w(t) - W_0}{2W_0} \right)^2 \text{-----} \right] \quad \text{----- (7.5.2)}$$

展開部は才二項迄取れば充分である。斯様にして求めた $2v_s(t)/V_0$ の値を才7.5.2図に肉太に示した。次に

$$\frac{v_r(t)}{V_0} = \xi(t) * \frac{2v_s(t)}{V_0} \quad \text{----- (7.5.3)}$$

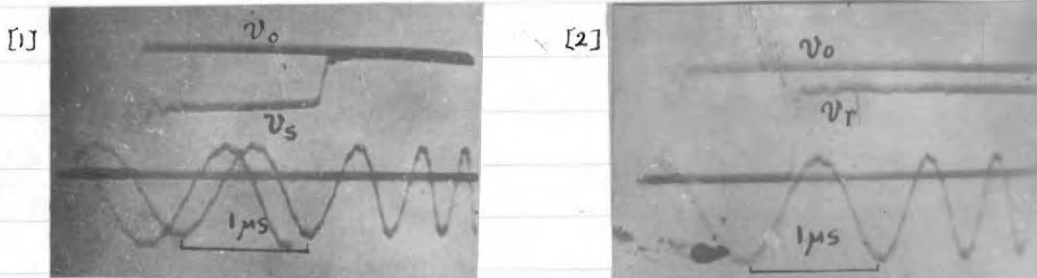
であるから、この計算結果を同図中肉太に示した。かくて、変歪特性は亦



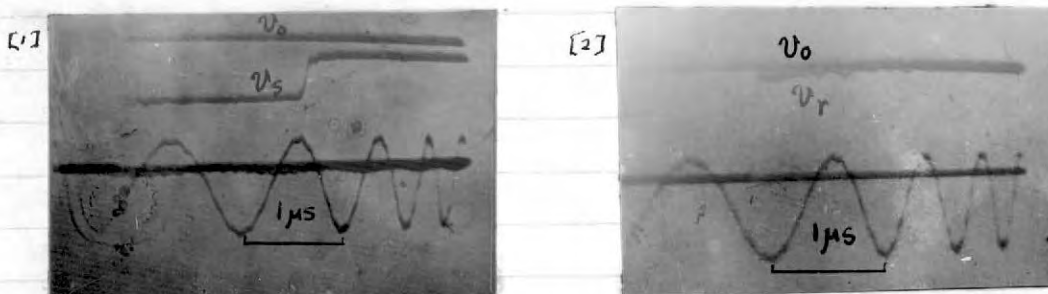
第7.6.1図 構造方式

7.6-1
特性定数

全長	225 mm
分佈定数	6.22 Ω/m
波動速度時間	0.73 ps
波動速度利用頻	222 GHz
挿入損失係数	225 kΩ/m (21 dB)
送受損失係数	$w(f) = H_0(1 + af)$
伝達比算式	$d(f) = 1 - (1 + af)^2 R_{in} (1 - a)^2 R_{out}$
損失係数算式	損失係数算式
H_0	222 Ω
a	0.278 ps/m
f	0.73
β	22 ps
T	2.6 ps



第7.6.2図 無補償状態に於ける入端及終端電圧



第7.6.3図 補償状態に於ける入端及終端電圧

め得られた。少くも $v \leq 0.3$ の領域で $v_r(t)$ は巨大電圧 0.7898 に急速に到達し $v_s = 0.3$ に於て 0.8% の値を超過する。若し斯様に入端整合とせず、終端整合のみ行つた場合は、以上う逆の傾向となるので変圧特性は悪く、始終端にて整合を行つた時は両者相殺し $v_r(t)$ の影響は殆んど無い。

7.6 京大型遅延線の試作と実験結果 其の一

7.6.1 構造方式

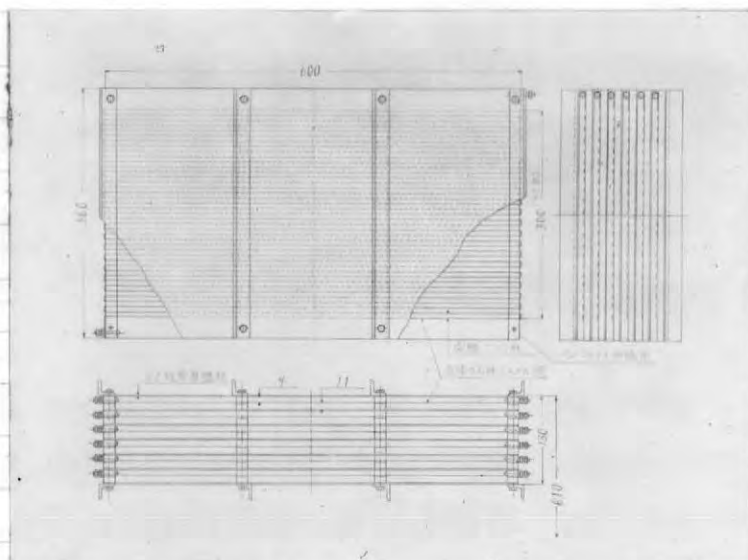
前節の諸定数を採擇する事とし、實際製作上の都合も考慮に入れた結果オ7.6.1 図の如き構造のものゝ試作した。図に於て導線は所謂「ジグザグ型」に折り返され、金属板上に一定の高さまで排列され、而して導線の処々には $G = R/W_0^2$ の関係を持つ漏洩抵抗を配布する。この形式に於ては使用導線が細い程器具の占める容積が低減する。斯かる構造方式にすることにより得られる特徴を列記すると

- (i) 遅延線の波動抵抗を比較的大ならしめる事が可能である。
- (ii) 隣接電線が「ジグザグ」を為し、隣接電線間の相互誘導作用が交互に減殺されること。
- (iii) 金属板と導線の單位構造を多數サンドウイッチ型に積重ねる事に依り電磁的遮蔽を完全ならしめると共に器具の全形態が縮小すること等を舉げる事が出来る。

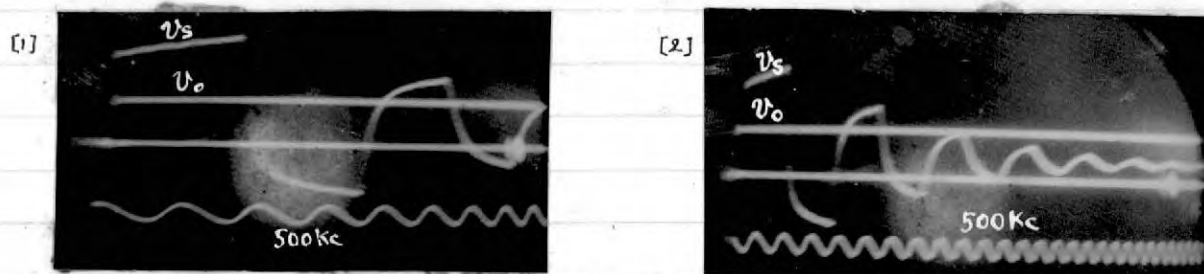
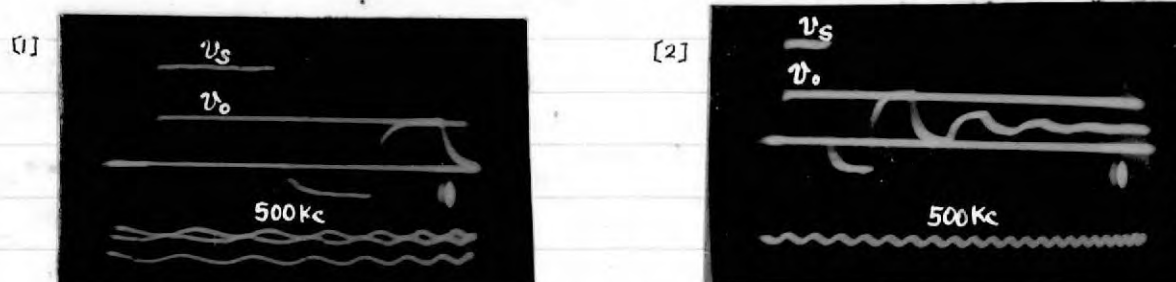
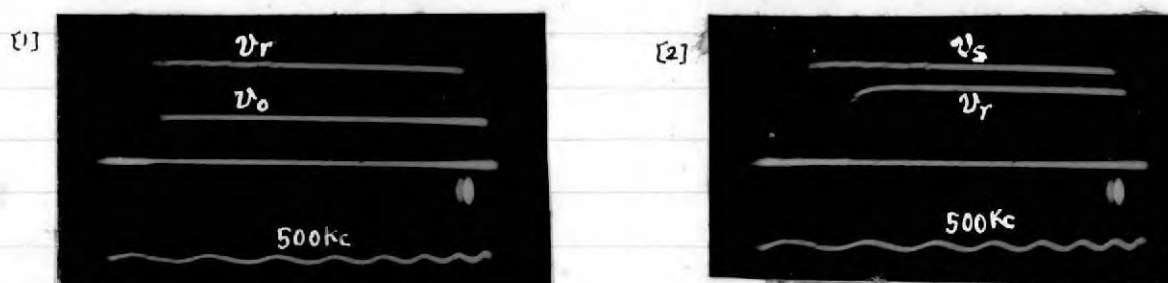
7.6.2 実験結果

オ一京大法に相当する実験法で、変圧特性の実測を行つた。其の方法は内部抵抗 225 Ω の衝撃電圧発生装置を用ひ、其の無負荷出力電圧 $v_0(t)$ 及遅延線接合時の入端電圧 $v_s(t)$ 及終端電圧 $v_r(t)$ を記録するものであつて、 $v_0(t)$ と $v_s(t)$ より波動インピーダンスを $v_s(t)$ と $v_r(t)$ より影像電圧比が概ね推定し得られる。漏洩抵抗を接続し補償線路とした時とせぬ時の二者に就て、同一測定を行つた時のオシログラムをオ7.6.2 図及オ7.6.3 図に示した。オシログラムに対して作つた特性定数表は一拾オ7.6.1 表に示す。波頭変圧の実験式を近似的に指數函數破として示すことは、概算的を見積りをするのに役立つから、この方針で実験式を作つた。これに従へば前節で計算した導線構成時の新遅延線の変圧誤差は $1/0.0051 \mu s^{-1}$ の減衰指數をもつから、オシログラムに依る実測値 $1/0.031 \mu s^{-1}$ は甚だしく大である。この原因は導体支持物の誘電体損失数へられるが隣接導体間の直線的誘導作用の影響が大であつたと思はれる。即ち波動傳播速度が、

1) 電学誌 63.662 (昭18-9)⁽³¹⁾に既發表



第7.7.1図 構造図

第7.7.2図 無補償状態に於ける入端インピーダンス (第=京大法 $R_s = 100 \Omega$)第7.7.3図 補償状態に於ける入端インピーダンス (第=京大法 $R_s = 100 \Omega$)

第7.7.4図 補償時終端整合を行った場合の入端インピーダンス及終端電圧比

光速より若干早いのであるが、これは明かに直線的誘導作用の影響を物語るものである。然し斯かる現象にも拘らず、オシログラムより明かな如く試作遅延線の特性は優秀で、通常構造のものと同等以上の性能を有し、特に乾紙ケーブルの如きより良好で充分実用に供し得るものであると信ずる。

7.7 京大型新遅延線の試作及実験例 其の一

7.7.1 構造方式

前節の試作品が予備的であつたに反し、今回は実用的な試作を行ひ、4個体に分離可能な24段のサンドウィッチ型に纏め上げた。其の形態諸元は、巾36cm×60cm、高さ61cmの長方体で可搬的である。導体は直径0.6mmエナメル銅線を、間隔20mmの真鍮板間の中央附近に展張し、線間隔7.25mmでジグザグ状に折返した。其の使用全長592mである。

之等の構造図面は第7.7.1図の如くである。導線の全長抵抗は38.2 Ω と算定される。其の波動インピーダンスは、電線直径の大きさが與へる影響を一部省略した次の計算式で概算し得る。

$$W_0 = 138 \left\{ \log \frac{2h_1 - r}{r} + \log \left(\frac{D}{\pi h_1} \sin \frac{\pi h_1}{D} \right) \right\} \Omega \quad \text{--- (7.7.1)}$$

茲にDは平板間隔、 h_1 は導体と近接平行板間の距離、rは導体の半径である。試作品に対して算定の結果 $W_0 = 223 \Omega$ を得る。

7.7.2 実験結果

本=京大技で以て施行した。標準抵抗 $R_s = 100 \Omega$ 、直列高抵抗 $R_m = 4760 \Omega$ に選んで、波動インピーダンス及影像電圧比を測定した。前節の記法にならひ、 V_s を遅延線入端の電圧、 V_r を終端の電圧とし、標準抵抗 R_s で校正した電圧を V_0 と記して各々區別する。第7.7.2図 [1] [2] 及第7.7.3図 [1] [2] は漏洩抵抗を附せぬ場合と附した場合に就て、終端短絡時の入端インピーダンスのオシログラムである。何れも高周掃引と緩掃引の二者のオシログラムを示した。この結果初期波動インピーダンスは210 Ω と算定せられ、又波動伝播時間 t は1.75 μs となる。使用漏洩抵抗は、全長に就き $20 K\Omega / 19 = 1050 \Omega$ であつて、この値は波動インピーダンスの測定値から算出した適値1150 Ω に対して若干低い。

第7.7.4図 [1] は終端抵抗210 Ω を挿入した場合の入端インピーダンスを示すオシログラムである。線路の不均衡性から起きて居る小波連は問題とならぬ程度であるから、殆ど純抵抗と同じ性質を示してゐる。第7.7.4図より大阪変圧器株式会社に依り製作され昭和23年度関西地方の雷観測に使用された。

[2]は同一状態の入端電圧と出力端電圧を示すオシログラムであつて、この際の v_1 の歪曲は実用的に充分満足し得る程度である。其の電圧比の実験式を概ね

$$\eta(t) = f(1 - e^{-\beta t} - (1 - e^{-\beta t})e^{-\alpha t})$$

とする時は $f = 0.777$, $t_0 = 0.3$, $\beta = 1.4 \mu s^{-1}$, $\alpha = 3.3 \mu s^{-1}$ の数値を得る。歪曲の状況は乾紙ケーブルに於けるよりも若干良好である。

7.8 結 言

新遅延線方式に於て最大の注意を要する点は、導線表皮作用の影響であらうと思はれる。若しこの影響が無いならば遅延線の形態は如何様にも縮小せしめられ小型化することが出来る。事實はそうでないから設計上最も重要な対象は波動インピーダンス及導線太さの問題である。

本章に行つた表皮作用に対する数値計算の結果より、波動インピーダンスが大である時には、変歪作用が比較的小さくする事が看取せられる。この実は導線を細小にするために起る悪影響が相当緩和される事を物語るのであつて、線路占有容積を調節することによりむしろ良好な結果を収めることも出来る。本数値計算に採用したパラメーターの数値は、先づ実用上採擇可能と思はれる範囲を網羅したから、波頭変歪の理論上の見積りが得られ、其の貢献は大なるものがあらうと信ずる。

次に新遅延線を導線構成とする場合、変歪を低減し得る事実を現象演算した。この演算法で遅延線の分圧現象が図形的に與へられた波動インピーダンス及影像電圧比の値から求め得られる事を示したのは同法に対する好例と考へられる。

最後に遅延線の試作構造に新機軸を太し、隣接導線の相互結合が懸念される程度のジグザグ状の構成であり乍ら、実験の結果実用上充分満足すべき特性が得られる事を確認した。

第 VIII 章

空中線結合分圧器に関する研究¹⁾

8.1 緒言

雷放電に伴ふ衝撃性地上電界強度を測定するに、空中線結合分圧器に據る方法は、Wattson Watt, H. Norinder, B.F.J. Schonland 等々²⁾ 或は、日本學術振興会の雷観測研究に用いられてゐる。本章は斯かる空中線結合分圧器に關し一考察をなすべく試みた研究である。其の対象は陰極線オシログラフに依り、雷現象の高速撮影をする場合を主眼に、専ら測定誤差を検討する。この測定誤差の原因として數へられる内、特に空中線の波動性に基くものを詳細に吟味する。

先づ最初に、空中線分圧器の各種構成例と、名稱及一般化せる分圧基本式を提示する。次に抵抗分圧器、容量分圧器、及抵抗容量分圧器三者に対し、空中線の波動性を無却した場合の分圧特性を簡單に紹介し、次で波動性を算入した場合の計算を行ふ。次で=三の數値計算を行ひ、波動性振動の状況を明かならしめる。更に空中線の不均一分布定數に依る振動及変歪作用を実例の場合を組上に、理論的計算及數値計算を行つて状況を明瞭ならしめる。

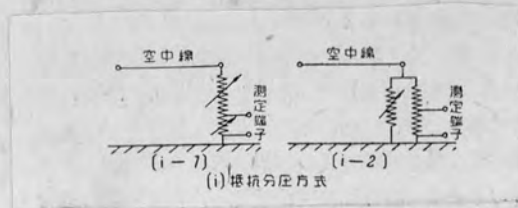
8.2 空中線分圧器の方式、分圧特性の基本式

8.2.1 總説

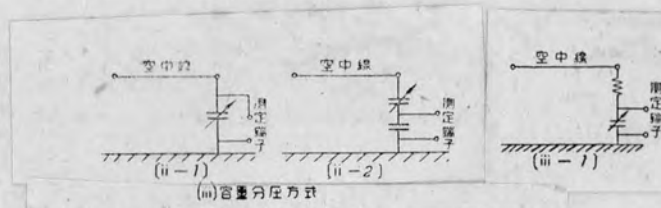
測定用空中線は、通常地上電界の等電位面に沿つて、短く張られる。この空中線に導入線を附さぬ場合、空中線電位は電界の変動に対応する電圧を出現し、其の実効高さにて除し地上電位傾度を得られる。夫故測定すべき電圧とは、空中線が電氣的に浮動状態の誘起電圧である。然るにこの電圧を測定せんとして導入線を附し諸装置を接続すると、茲に測定攪乱作用が行はれ、被測定電圧が変歪する。その作用の内最も顯著な影響を與へるものは、オシログラフ端子のコンダクタンスである。このコンダクタンスは襲雷時の空中媒質が空中線に與へるコンダクタンスに比し極めて大に取るのが普通であるから、電界が靜穩な定常状態ではオシログラフ端子及空中線には電圧を出現しない。この点では大気電場觀測用の象限電位計に於けるが如きと著しく相違して居る。併し電位傾度の時間的变化が大であれば、空中線の誘起電荷は過渡的に残留し、オシログラフ端子に或る性質の

1) 要評 31.5~8 (昭18-5~8)⁽³²⁾ に既發表

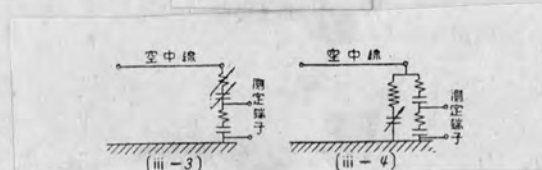
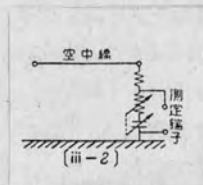
2) W. Watt: Proc Roy Soc, A 103 (1923)⁽³³⁾, H. Norinder: J.F.I 218 717 (1934)⁽³⁴⁾



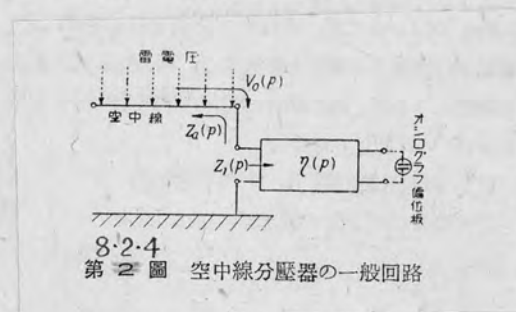
第 8.2.1 圖



第 8.2.2 圖



第 8.2.3 圖



電圧を出現させる。而して緩徐に変動する電位傾度を測定することには非常な誤差を含むのが、空中線使用分圧器の特質であるが、雷放電時の急激な相対的変動値を測定する目的には支障を来さないものである。測定範囲を大ならしめる目的で、空中線に適當な可変比分圧器を接続するのが普通である。而してこの部分で一部回路の波動性による変位誤差の抑圧及び漂遊靜電容量の影響緩和、漏洩コンダクタンスの設定等を行ふ。

8.2.2 各種分圧方式

(i) 抵抗分圧方式

空中線の一端を漏洩抵抗を通じて接地し、この抵抗に依り、適當な分圧比を得ると同時に、絶縁抵抗を一定値に確保せんとする方式であつて代表的一例をFig. 8.2.1に示す。

(ii) 容量分圧方式

空中線と並列に靜電容量を接続して空中線の誘起電荷の一部を吸収させ、空中線電位を引下げる事に依り分圧電圧を得る方式である。其の代表的一例をFig. 8.2.2に示す。同図中 [iii-1], [iii-2] は抵抗容量分圧器と稱す可きであるが習慣上、之等は凡て容量分圧の名稱を冠せられる。

(iii) 抵抗容量分圧方式

代表的例をFig. 8.2.3に示す。

8.2.3 一般的分圧基本式

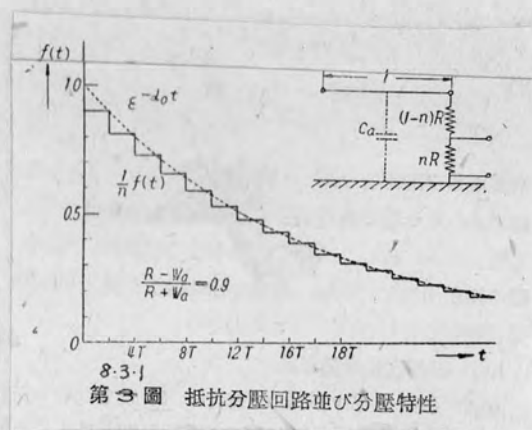
如何に複雑な分圧器構成も、之を電氣的等價回路に書き換へれば、Fig. 8.2.4図のやうな一般四端子回路網で代置される。この四端子回路は空中線導入端より測定装置に至る凡てのインピーダンスを含ませてよく、勿論波動性を有する場合にも適用して差支へない。以下演算子函数を使用し諸定數を表現するとして、導入端から見た空中線インピーダンス函数を $Z_a(p)$ 同様測定器に向つて見た夫を $Z_1(p)$ 、四端子回路の導入端、オシログラフ端子間電圧比を $N(p)$ とすればテブナン定理より明かに

$$V(p) = V_0(p) \frac{Z_1(p)}{Z_a(p) + Z_1(p)} N(p) \quad \text{----- (8.2.1)}$$

となる。但し $V_0(p)$ は空中線誘起時の誘起電圧 $v_0(t)$ の演算子函数形、 $V(p)$ はオシログラフ端子の電圧 $v(t)$ に対する同形である。(8.2.1) を分圧基本式に取る。(8.2.1) に於て

$$F(p) = \frac{Z_1(p)}{Z_a(p) + Z_1(p)} N(p) \quad \text{----- (8.2.2)}$$

とすれば、この時間函数 $f(t)$ を求める事に依り、



$$v(t) = v_0(t) * f(t) \quad \text{-----} \quad (8.2.3)$$

とする。それ故に $f(t)$ の値さへ決定して置けば、相乗計算により、任意の $v_0(t)$ に対する $v(t)$ が算出せられる。故に $f(t)$ を分圧特性と呼称する。 $f(t)$ の物理的意味は $v_0(t)$ が $H(t)$ である時オシログラフ端子に出現する電圧の事である。

8.3 空中線を集中定数と假定する時の分圧特性

8.3.1 抵抗分圧回路(オ8.2.1 図 [i-1] の分圧特性

この場合には先づ空中線を波動性あるものとして扱い、後に波動性を除去して考へる事とする。オ8.2.5 図内の回路定数を参照し

$$\left. \begin{aligned} Z_1(p) &= R_0 & N(p) &= n \\ Z_a(p) &= W_a(p) \left[1 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \bar{\zeta}^{2v}(p) \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} \quad (8.3.1)$$

とする。但し

$W_a(p)$: 空中線の波動インピーダンス

$\bar{\zeta}(p)$: 空中線の両端映像電圧比

である。之より (8.2.2) を使用し

$$F(p) = \frac{n R_0}{R_0 + W_a(p)} \left[1 - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2 W_a(p)}{R_0 + W_a(p)} \left(\frac{R_0 - W_a(p)}{R_0 + W_a(p)} \right)^{v-1} \bar{\zeta}^{2v}(p) \right] \quad \text{-----} \quad (8.3.2)$$

とする。簡単のため 空中線が単位長静電容量 C の無損失一様分布定数回路の等価性で置換へる時は、 T を全長波動傳播期間とし

$$W_a = T / c l, \quad \bar{\zeta}(p) = e^{-Tp} \quad \text{-----} \quad (8.3.3)$$

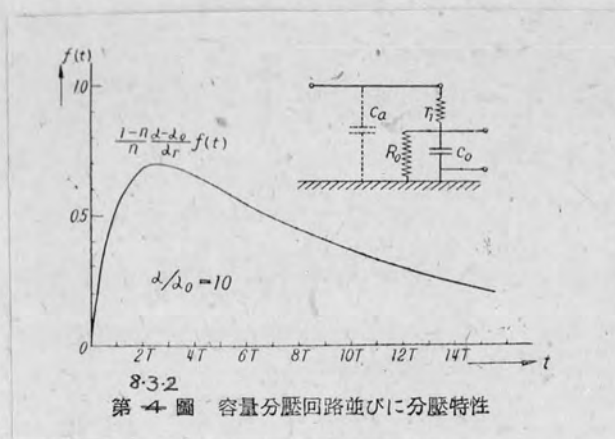
とする。この關係を以て (8.3.2) を演算する時は

$$f(t) = \frac{n R_0}{R_0 + W_a} \left[1 - \frac{2 W_a}{R_0 + W_a} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{R_0 - W_a}{R_0 + W_a} \right)^{v-1} \right] H(T - 2vT) \quad \text{-----} \quad (8.3.4)$$

とする。今 この $f(t)$ の形狀を明瞭ならしめる爲に R が W_a より相当大である時の $f(t)$ の形狀を一例取つて計算するとオ8.3.1 図実線の如く段狀となる。

若し $f(t)$ の時間全域が T より遙かに大であると $\bar{\zeta}(p)$ は

$$\bar{\zeta}(p) \cong 1 - Tp \quad \text{-----} \quad (8.3.5)$$



と取って差支へない。然る時 (8.3.2) を変形し (8.3.5) の近似関係を入れる時は 次の形となる。

$$F(p) = \frac{n R_0}{W_a \frac{1 + \Omega^2(p)}{1 - \Omega^2(p)} + R_0} \cong n \cdot \frac{p}{p + \alpha_0} \quad (8.3.6)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{C_a R_0}, \quad C_a = C_l$$

(8.3.6) は

$$f(t) = n e^{-\alpha_0 t} \quad (8.3.7)$$

となる。これは空中線を集中静電容量回路と看做した結果と等しい。其の形状を明白にする爲、Fig. 8.3.1 図の実線に前と同一条件の計算結果を示す。

巨視的に分布定数の場合とよく一致して居る。

8.3.2 容量分圧回路 Fig. 8.2.2 図 [iii-1] の分圧特性

前項の結果より、空中線回路を近似的に其の対地静電容量のみとする。然る時 Fig. 8.3.2 図附図の回路定数を (8.2.2) に対応せしめれば

$$\left. \begin{aligned} F(p) &= \frac{n}{1-n} \frac{\alpha_r(p)}{(p + \alpha_s)(p + \alpha_o)} \\ \left. \begin{aligned} \alpha_s &= \frac{\beta + k\beta_0 \pm \sqrt{(\beta + k\beta_0)^2 - 4\beta\beta_0}}{2} \\ \alpha_o &= \frac{\beta + k\beta_0 \mp \sqrt{(\beta + k\beta_0)^2 - 4\beta\beta_0}}{2} \end{aligned} \right\} \\ \beta &= \frac{C_a + C_o}{C_a C_o r_i}, \quad \beta_0 = \frac{1}{(C_a + C_o) R_0}, \quad \alpha_r = \frac{1}{C_a r_i} \\ n &= \frac{C_a}{C_a + C_o}, \quad k = \frac{C_a + C_o}{C_o} \end{aligned} \right\} \quad (8.3.8)$$

となる。この演算結果は

$$f(t) = \frac{n}{1-n} \frac{\alpha_r}{\alpha_s - \alpha_o} (e^{-\alpha_o t} - e^{-\alpha_s t}) \cdot H(t) \quad (8.3.9)$$

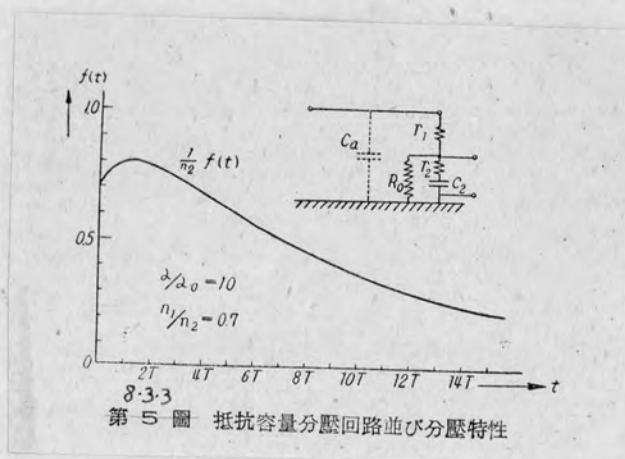
となる。通常 $r_i \ll R_0$ であるからこの条件を考慮すると

$$\alpha_s \cong \beta \ll \alpha_o \cong \beta_0$$

である。依つて

$$f(t) \cong n \left(e^{-\frac{1}{(C_a + C_o) R_0} t} - e^{-\frac{C_o + C_a}{C_o C_a r_i} t} \right) \cdot H(t) \quad (8.3.10)$$

となる。この算式は近似の物理的意味が明確で実用上大なる誤差を生ずる事なく使用出来る。Fig. 8.3.2 図に (8.3.9) の分圧特性の一例を図示する。



8.3.3 抵抗容量分圧回路 8.2.3 図 [iii-2] の分圧特性

8.2.3 図の附図を参照し (8.3.2) に従ふ各定数を定め計算の結果分圧特性は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} F(p) &= \frac{r_2 R_0 p (p + \alpha_2)}{r_1 (p + \alpha_1) [r_2 (p + \alpha_2) + R_0 p] + r_2 R_0 (p + \alpha_2)} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{C_a r_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{C_2 r_2} \end{aligned} \right\} \quad (8.3.11)$$

(8.3.11) を一見すれば明かき如く $\alpha_1 = \alpha_2$ をる条件を保たせれば $F(p)$ は p の一次形となる。仍つて今

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 = \alpha_2 \\ n &= \frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{C_a}{C_a + C_2} \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} (8.3.12)$$

と取れば

$$F(p) = \frac{n R_0}{n r_1 + R_0} \cdot \frac{p}{p + \frac{n r_1 \alpha}{n r_1 + R_0}} \quad \text{-----} (8.3.13)$$

之より

$$f(t) = n \frac{R_0}{n r_1 + R_0} \mathcal{E}^{-\frac{n r_1 \alpha}{n r_1 + R_0} t} \cdot H(t) \quad \text{-----} (8.3.14)$$

若し $R_0 \gg n r_1$ であれば

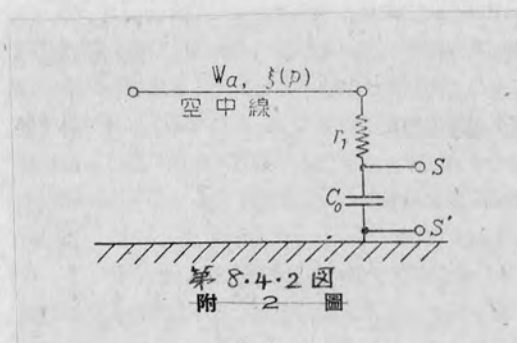
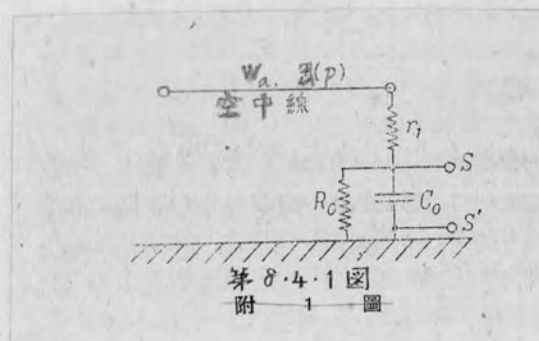
$$f(t) \doteq n \cdot \mathcal{E}^{-\frac{n}{R_0 C_a} t} \cdot H(t) \quad \text{-----} (8.3.15)$$

となる。即ち (8.3.12) の採用に依り分圧特性は単一指数函数となる。一般的に $\alpha_1 \neq \alpha_2$ の時 (8.3.11) は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} F(p) &= \frac{n_1 R_0}{n_1 r_1 + R_0} \frac{p(p + \alpha_2)}{(p + \alpha_s)(p + \alpha_o)} \\ \alpha_s \} &= \frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4 k_2 (R_0 + n_1 r_1)}}{2 (R_0 + n_1 r_1)} \\ \alpha_o \} & \\ n_1 &= \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \quad k_1 = n_1 r_1 \alpha_1 \alpha_2 \\ k_2 &= \frac{n_1}{r_2} [\alpha_1 r_1 (R_0 + r_2) + \alpha_2 r_2 (R_0 + r_1)] \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} (8.3.16)$$

この演算結果は

$$f(t) = \frac{n_1 R_0}{n_1 r_1 + R_0} \cdot \frac{1}{\alpha_s - \alpha_o} [(\alpha_2 - \alpha_o) \mathcal{E}^{-\alpha_o t} - (\alpha_2 - \alpha_s) \mathcal{E}^{-\alpha_s t}] H(t) \quad \text{-----} (8.3.17)$$



となる。この近似式を導出するに $r_1 \ll R_0$, $r_2 \ll R_0$ かつ $4r_1^2 \gg 4r_2 R_0$ である。従って

$$\alpha_s = \frac{r_1}{n_1 r_1 + R_0} - \frac{r_2}{r_1}, \quad \alpha_o = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{----- (8.3.17)'}$$

を得る。更に省略度を増した略算式を造れば結局

$$f(t) \doteq \left\{ n_2 \varepsilon^{-\frac{1}{(C_a + C_2) R_0} t} - (n_2 - n_1) \varepsilon^{-\frac{C_a + C_2}{C_a C_2 (r_1 + r_2)} t} \right\} H(t) \\ n_2 = \frac{C_a}{C_a + C_2} \quad \text{----- (8.3.18)'}$$

となる。本式も物理的に其の内容が明確である。即ち迅速に終熄する過渡現象が終了後緩徐な過渡現象が後續する事を示す。*8.3.3図は、この分圧特性の一例を図示したもので $\alpha/\alpha_o = 10$ $n_1/n_2 = 7/10$ の場合を表して居る。

8.4 空中線の分布定数を考慮せる分圧特性

8.4.1 容量分圧方式

(i) 漏洩抵抗を含む回路 (分圧特性 $f_1(t)$)

*8.4.1図の如き分圧回路に於て空中線の波動性を考慮するものとし、其の波動インピーダンスを W_a 、映像電圧比を $\Sigma(p)$ 、波動傳播期間を T 、波動インピーダンスは純抵抗として働くものとする。

分圧回路の各定数値は図示の如くとし(8.2.2)の分圧基本式に従ふ各定数を記載すれば

$$\left. \begin{aligned} Z_a(p) &= W_a [1 + \Sigma(p)] \sum_{v=1}^{\infty} \Sigma^2(p) \\ Z_1(p) &= r_1 + \frac{1}{C_0 p + \frac{1}{R_0}} \\ N(p) &= \frac{1}{Z_1(p)} \cdot \frac{1}{C_0 p + \frac{1}{R_0}} \end{aligned} \right\} \text{----- (8.4.1)'}$$

である。故にこの場合の分圧式 $F_1(p)$ は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(p) &= n_1 \left[\frac{r_1}{p + r_1} + r_1 \sum_{v=0}^{\infty} \mu_1^v (\mu_1 - 1) \frac{(p + \alpha_1)(p + \beta_1)^v}{(p + r_1)^{v+2}} \Sigma(p)^{2v} \right] \\ \alpha_1 &= \frac{1}{C_0 R_0}, \quad \beta_1 = \frac{r_1 \delta_1 - W_a \alpha_1}{r_1 - W_a} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{r_1 \delta_1 + W_a \alpha_1}{r_1 + W_a}, \quad \delta_1 = \frac{r_1 + R_0}{r_1 R_0}, \\ \mu_1 &= \frac{R_0}{r_1 + R_0 + W_a}, \quad \mu = \frac{r_1 - W_a}{r_1 + W_a} \end{aligned} \right\} (8.4.2)$$

之を演算し分圧特性 $f_1(t)$ は次の如くなる。

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \mu_1 \left[(1 - e^{-\gamma_1 t}) H(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu_1^s (\mu_1 - 1) \sum_{v=0}^s (-1)^v \binom{s}{v} \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \left(\frac{\gamma_1 - \beta_1}{\gamma_1} \right)^v \right. \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{(\gamma_1 t - 2sT)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{\gamma_1}{\alpha_1} - \sum_{\lambda=0}^{v+1} \binom{v+1}{\lambda} \lambda! \gamma_1 (t - 2sT)^{-\lambda} \right] e^{-\gamma_1 t} \right. \\ &\quad \cdot H(t - 2sT) \Big] \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

但し $\square(p)$ は e^{-Tp} とした。若し $\xi(t)$ が $H(t-T)$ でよく

$$\xi(t) = \xi_0(t) * H(t-T)$$

の形を持つ時は

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \mu_1 \left[(1 - e^{-\gamma_1 t}) H(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu_1^s (\mu_1 - 1) \sum_{v=0}^s (-1)^v \binom{s}{v} \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \left(\frac{\gamma_1 - \beta_1}{\gamma_1} \right)^v \right. \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{(\gamma_1 t)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{\gamma_1}{\alpha_1} - \sum_{\lambda=0}^{v+1} \binom{v+1}{\lambda} \lambda! \gamma_1 t^{-\lambda} \right] e^{-\gamma_1 t} * \xi(t) \right\} \end{aligned} \quad (8.4.3)'$$

となる。(8.4.3) より (8.4.3)' への変換は容易であるから以下 $\xi(t)$ が $H(t-T)$ の場合のみを扱う事とする。

(ii) 漏洩抵抗を円却せる回路 (分圧特性 $f_2(t)$)

R_0 を除去した場合の分圧式は (8.4.1) より

$$\left. \begin{aligned} F_2(p) &= \frac{\gamma_2}{p + \gamma_2} + \gamma_2 \sum_{s=0}^{\infty} \mu_2^s (\mu_2 - 1) \frac{p(p + \beta_2)^s}{(p + \gamma_2)^{s+2}} e^{-2sTp} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{(r_1 + W_a)C_0}, \quad \beta_2 = \frac{1}{(r_1 - W_a)C_0}, \quad \mu_2 = \mu_1 \end{aligned} \right\} (8.4.4)$$

となる。この場合の分圧特性 $f_2(t)$ は次の如くなる。

$$\begin{aligned} f_2(t) &= (1 - e^{-\gamma_2 t}) \cdot H(t) + \sum_{s=0}^{\infty} \mu_2^s (\mu_2 - 1) \sum_{v=0}^s (-1)^v \binom{s}{v} \left(\frac{\gamma_2 - \beta_2}{\gamma_2} \right)^v \\ &\quad \cdot \frac{(\gamma_2 t - 2sT)^{v+1}}{(v+1)!} e^{-\gamma_2(t-2sT)} H(t - 2sT) \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

(iii) 相乗近似法 ($f_1(t)$ の近似導出)

R_0 を含ませた回路の分圧特性は (8.4.3) に依り精算されるが、二

の解式よりも、 R_0 を含める場合の解式(8.4.5)の方が実数計算は遙かに容易である。

一般に複雑な函数式を取扱い、実数計算の必要がある時には、其の算式を幾つかの函数の相乗型式に誘導し、図式又はその他の方法で相乗計算を実施する方が手段に於て遙かに優れてゐる。(8.4.3)に於て斯かる方法を実施することは特殊の手法を廻らす事に依り容易に行へる。然し本章に於ては、現象の物理的意義を尊重し、別法に依り R_0 が存在する時の分圧特性 $f_1(t)$ を、 R_0 を除きせる分圧特性 $f_2(t)$ 及他の函数式二個の相乗形を以て近似的に導出する方法を與へる。

條件として $R_0 \gg Y_1 + W_a$ の場合を取る。斯かる場合(8.4.4)と(8.4.2)とを比較し $F_1(p)$ を次の如く書換へる。

$$F_1(p) = \frac{1/C_0}{r_1(p + \delta_1) + W_a p \coth(\log \Xi(p)^{-1})} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha_1 \coth(\log \Xi(p)^{-1})}{r_1(p + \delta_1) + W_a p \coth(\log \Xi(p)^{-1})}}$$

$$\mu_2 = \mu_1 \quad \text{----- (8.4.6)}$$

(8.4.6) に於て、 R_0 が大きい条件を入れると

$$\delta_1 \cong \delta_2, \quad r_1 \cong r_2$$

$$\frac{r_1(p + \delta_1) C_0}{W_a p} + O\left(\frac{\coth(\log \Xi(p)^{-1})}{R_0}\right) = \frac{r_1(p + \delta_1) C_0}{W_a p} + O\left(\frac{1}{TR_{op}}\right)$$

然る時(8.4.6)は

$$F_1(p) \doteq F_2(p) \frac{p^2 + \alpha_s p}{p^2 + \alpha_s p + \alpha_s \alpha_0} \quad \text{----- (8.4.7)}$$

但し

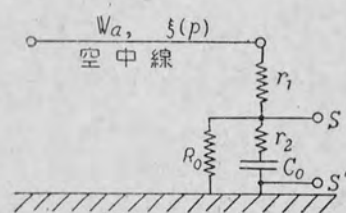
$$\alpha_s = \frac{C_a + C_0}{C_a C_0 r_1}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{(C_a + C_0) R_0} \quad \text{----- (8.4.7)'}$$

とする。 $\alpha_s \gg \alpha_0$ なる条件を利用し

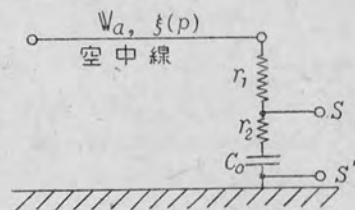
$$\frac{p^2 + \alpha_s p}{p^2 + \alpha_s p + \alpha_s \alpha_0} \doteq \frac{p}{p + \alpha_0} \quad \text{----- (8.4.8)}$$

とする事が出来る。(8.4.8)の時間函数は $e^{-\alpha_0 t}$ である。従つて結局

$$f_1(t) \doteq f_2(t) * e^{-\alpha_0 t} \quad \text{----- (8.4.9)}$$



第 8.4.3 图
附 3 圖



第 8.4.4 图
附 4 圖

なる帰結が得られる。 $e^{-\alpha_0 t}$ なる函数が物理的に空中線静電容量 C_a と分圧静電容量 C_0 との和なる並列回路の準定常的漏減特性を示すは明かである。

即ち意義の明白なる二特性式の相乗を以て(8.4.3)の近似解が得られた事になる。

8.4.2 抵抗容量分圧器

(i) 漏減抵抗を含ませた回路 (分圧特性 $f_3(t)$)

先8.4.3図の如き分圧回路に於て定數値を記入の如くし其の分圧基本式を導出すれば次の如くなる。

$$F_3(p) = n_3 \left[\frac{p + \delta_3}{p + \gamma_3} + \sum_{s=0}^{\infty} M_3^s (\mu_3 - 1) \frac{(p + \delta_3)(p + \alpha_3)(p + \beta_3)^s}{(p + \gamma)^{s+2}} \square(p)^{2s} \right] \quad (8.4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{1}{(r_2 + R_0)C_0}, & \delta_3 &= \frac{1}{\left(r_2 + \frac{r_1 R_0}{r_1 + R_0}\right)C_0} \\ \beta_3 &= \frac{1}{r_2 C_0}, & n_3 &= \frac{1}{W_1 + W_a} \cdot \frac{r_2 R_0}{r_2 + R_0} \\ \gamma_3 &= \frac{W_1 \delta_3 + W_a \alpha_3}{W_1 + W_a}, & \mu_3 &= \frac{W_1 \delta_3 - W_a \alpha_3}{W_1 - W_a} \\ M_3 &= \frac{W_1 - W_a}{W_1 + W_a}, & W_1 &= r_1 + \frac{r_2 R_0}{r_2 + R_0} \end{aligned} \right\} \quad (8.4.10)'$$

これを演算し分圧特性 $f_3(t)$ を得る。

$$\begin{aligned} f_3(t) &= n_3 \left[\frac{\delta_3}{\gamma_3} \left(1 - \frac{\delta_3 - \gamma_3}{\delta_3} e^{-\gamma_3 t} \right) \cdot H(t) \right. \\ &\quad + \sum_{s=0}^{\infty} M_3^s (\mu_3 - 1) \sum_{v=0}^s (-1)^v \binom{s}{v} \frac{\delta_3 \alpha_3}{\gamma_3^2} \left(\frac{\gamma_3 - \beta_3}{\gamma_3} \right)^v \left\{ 1 + \frac{\gamma_3^2}{\delta_3 \alpha_3} \frac{(\gamma_3 t - 2ST)^v}{v!} \right. \\ &\quad \cdot \left[1 + \frac{\alpha_3 + \delta_3 - \gamma_3}{v+1} (t - 2ST) - \sum_{\lambda=0}^{v-\lambda+1} \frac{(\gamma_3 t - 2ST)^{\lambda}}{(v - \lambda + 1)!} \right] e^{-\gamma_3 (t - 2ST)} \Big\} \\ &\quad \cdot H(t - 2ST) \Big] \quad (8.4.11) \end{aligned}$$

(ii) 漏減抵抗を閉却せる回路 (分圧特性 $f_4(t)$)

先8.4.3図の回路に於て $R_0 = \infty$ と取る事に依り基本分圧式は

$$F_4(p) = n_4 \left[\frac{p + \delta_4}{p + \gamma_4} + \sum_{s=0}^{\infty} M_4^s (\mu_4 - 1) \frac{p(p + \delta_4)(p + \beta_4)^s}{(p + \gamma_4)^{s+2}} \square(p)^{2s} \right]$$

但し、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_4 &= \frac{r_2}{r_1 + r_2 + W_a}, & \delta_4 &= \frac{1}{(r_1 + r_2) C_0} \\ \sigma_4 &= \delta_4, & \gamma_4 &= \frac{1}{(r_1 + r_2 + W_a) C_0} \\ \beta_4 &= \frac{1}{(r_1 + r_2 - W_a) C_0}, & \mu_4 &= \frac{r_1 + r_2 - W_a}{r_1 + r_2 + W_a} \end{aligned} \right\} (8.4.12)$$

と与る。之を演算し分圧特性 $f_4(t)$ は下記の如くなる。

$$\begin{aligned} f_4(t) &= \left\{ 1 - (1 - \gamma_4) e^{-\gamma_4 t} \right\} \cdot H(t) \\ &+ \gamma_4 \sum_{s=0}^{\infty} \mu_4^s (\mu_4 - 1) \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{s}{v} \frac{[(\delta_4 - \beta_4)(t - 2ST)]^v}{v!} \\ &\cdot \left\{ 1 + \frac{(\delta_4 - \gamma_4)(t - 2ST)}{v+1} \right\} e^{-\gamma_4(t - 2ST)} H(t - 2ST) \end{aligned} \quad \text{-----} (8.4.13)$$

(iii) 相乗近似法

a. $f_3(t)$ の近似導出

容量分圧方式の $f_1(t)$ と、全く同一の手法を以て、 $f_3(t)$ にも同様に相乗近似法が成立する。即ち (8.4.10) 及 (8.4.12) を比較し $R_0 \gg r_1, r_2, W_a$ なる条件の下に処理し

$$F_3(p) \doteq F_4(p) \frac{p}{p + \alpha_0} \quad \text{-----} (8.4.14)$$

と与る。故に

$$f_3(t) \doteq f_4(t) * e^{-\alpha_0 t} \quad \text{-----} (8.4.15)$$

で與へられる。

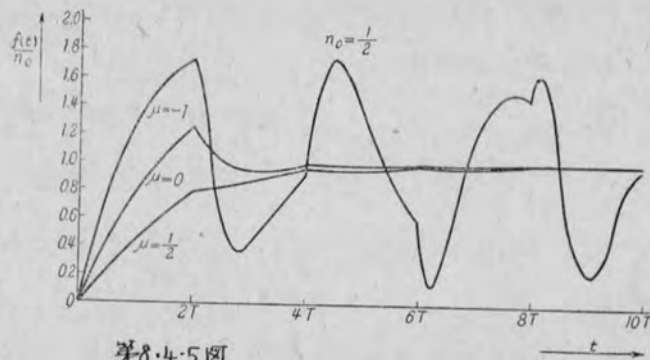
b. $f_4(t)$ の近似導出

次に $f_4(t)$ を導出する時の近似法を考察することにする。空中線を過制動せぬ状態即ち、 $(r_1 + r_2) \gg W_a$ なる条件を取つた場合には (8.4.12) に於て若干の省略を行ふ事が出来るが、特に実際の場合を考慮し、既に記述した補償条件 $r_1 C_a = r_2 C_0$ の場合を取る。然る時は

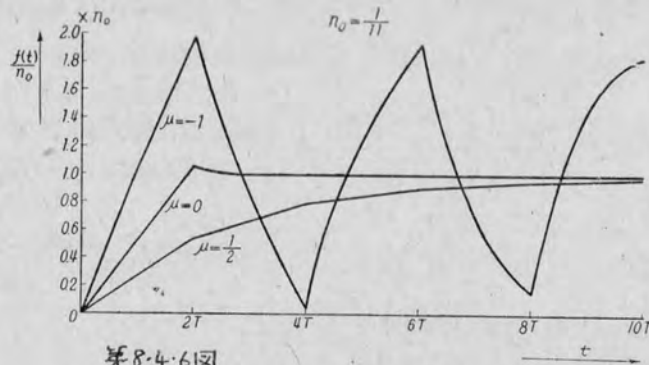
$$\frac{1}{p} \ll \frac{1}{\delta_4} = r_1 C_a = r_2 C_0 = \tau_0$$

なる条件の下に於て (8.4.12) は結局

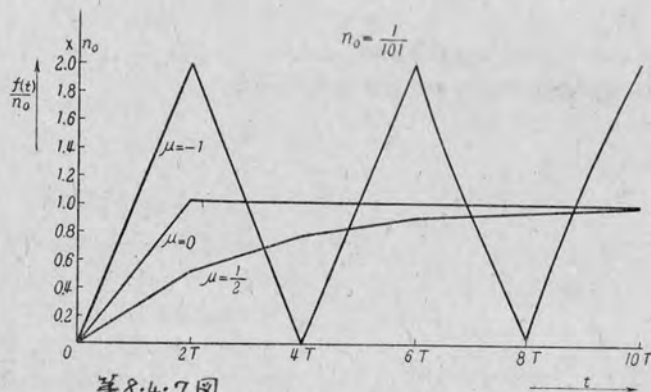
$$F_4(p) \doteq \gamma_4 \left[1 + \frac{(1 - \gamma_0)}{\tau_0 p} \frac{\tau_0 + T}{\tau_0 + (1 - \gamma_0) T} + \sum_{s=0}^{\infty} \mu_4^s (\mu_4 - 1) \left(1 + \frac{1}{\tau_0 p} \right) \zeta(p)^{2s} \right] \quad \text{-----} (8.4.16)$$



第8.4.5図

附5圖 容量分壓方式の特性 ($C_0 = C_a$)

第8.4.6図

附6圖 容量分壓方式の特性 ($C_0 = 10C_a$)

第8.4.7図

附7圖 容量分壓方式の特性 ($C_0 = 100C_a$)

とする。但し分圧特性の観察時間域は $t \gg T_0$ であるを要する。(8.4.16)の演算を行へば

$$f_4(t) = n_0 \left[\left\{ 1 + \frac{(1-n_0)(T_0+T)}{T_0+(1-n_0)T} \right\} H(t) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2(1-n_0)T}{T_0+(1-n_0)T} \left(\frac{T_0-(1-n_0)T}{T_0+(1-n_0)T} \right)^s \left(1 + \frac{t-2sT}{T_0} \right) \cdot H(t-2sT) \right] \quad \text{--- (8.4.17)}$$

とする。この式は、高度に制動し且つ分圧比を著大にした場合、使用に好都合で正確な結果が求められる。

8.4.3 各種分圧特性の数値計算

(i) 容量分圧方式

相乗近似法を考慮し(8.4.5)の $f_2(t)$ を数値計算する。計算に便なる如く、算式内の定数値を恒久分圧比 n_0 、反射係数 μ 、空中線往復波動傳播期間 T_2 の三者を以て代置すれば

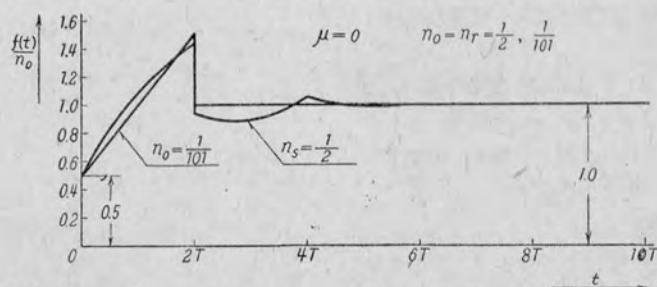
$$f_2(t) = n_0 \left[\frac{1 - \varepsilon^{-\frac{n_0(1-\mu)}{1-n_0} \left(\frac{t}{T_2} \right)}}{n_0} - \frac{1}{n_0} \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{s+1} \sum_{\nu=0}^s \binom{s}{\nu} \frac{\left[\frac{n_0(1-\mu)^2}{\mu(1-n_0)} \left(\frac{t}{T_2} - s \right)^{\nu+1} \varepsilon^{-\frac{n_0(1-\mu)}{n_0} \left(\frac{t}{T_2} \right)} H(t-sT_2) \right]}{(\nu+1)!} \right] \quad \text{--- (8.4.18)}$$

$$\text{但し} \quad \left. \begin{aligned} n_0 &= \frac{C_a}{C_0 + C_a} \quad , \quad \mu = \frac{r_1 - W_a}{r_1 + W_a} \\ T_2 &= 2T = 2W_a C_a \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (8.4.18)}$$

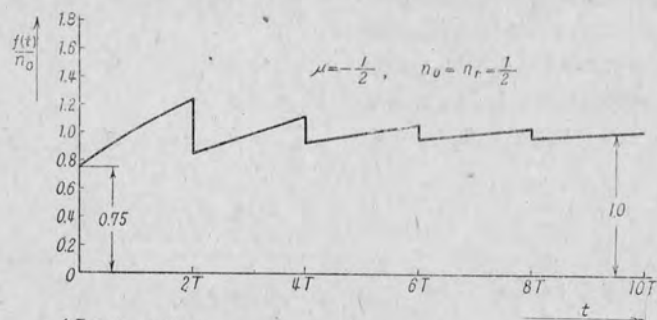
計算に選定した数値は下記の如くである。

$$\begin{aligned} n_0 &= \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{11} \quad , \quad \frac{1}{101} \\ \mu &= -1 \quad , \quad 0 \quad , \quad \frac{1}{2} \\ 0 &\leq t \leq 5T_2 \end{aligned}$$

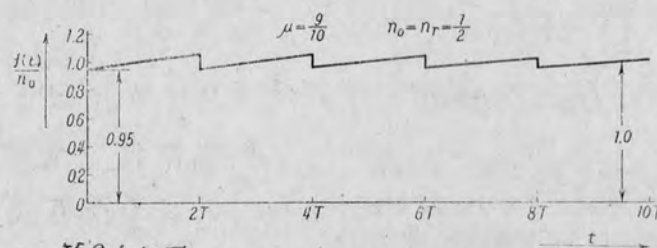
(8.4.18)の括弧内、即ち分圧比 n_0 に対する変歪係数のみに就て計算の結果を図示すれば、Fig. 8.4.5図, Fig. 8.4.6図, Fig. 8.4.7図の如くなる。結果より明瞭な如く $r_1 = 0$ とした無整合状態に於て、振動が甚だしく $r_1 = W_a$ なる整合状態では分圧変歪は最小であり、 $r_1 = 3W_a$ なる過制動状態では変歪は長期に亘る。而して分圧比率が大となるに従つて $\mu = 0$ なる制動状態が最も良好なる特性を示して居る。



第8.4.8图

附8图 抵抗容量分壓方式 ($r_1+r_2=W_a$), $n_0=1/2$ 及 $1/101$ 

第8.4.9图

附9图 抵抗容量分壓方式 ($r_1+r_2=3W_a$), $n_0=1/2$ 

第8.4.10图

附10图 抵抗容量分壓方式 ($r_1+r_2=19W_a$), $n_0=1/2$

(ii) 抵抗容量分圧方式

前例同様の数値計算を行ふ。計算に便宜なる如く(8.4.13)の諸定数を、容量分圧比 n_0 、抵抗分圧比 n_r 、反射係数 μ 、往復傳播期間 T_2 の四者で書き換へる時には

$$f_4(t) = n_0 \left[\left\{ \frac{1}{n_0} - \left(\frac{1}{n_0} - \frac{n_r}{n_0} \frac{1+\mu}{2} \right) e^{-\frac{n_0(1-\mu)}{1-n_0} \frac{t}{T_2}} \right\} H(t) \right. \\ \left. - \frac{n_r}{n_0} \frac{1-\mu^2}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \sum_{\nu=0}^s \binom{s}{\nu} \frac{\left[\frac{n_0(1-\mu)^2}{\mu(1-n_0)} \left(\frac{t}{T_2} - s \right) \right]^\nu}{\nu!} \right. \\ \left. \left\{ 1 + \frac{2n_0}{1-n_0} \frac{1-\mu}{1+\mu} \left(\frac{1}{n_r} - \frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{t}{T_2} - s \right) \right\} e^{-\frac{n_0(1-\mu)}{1-n_0} \left(\frac{t}{T_2} - s \right)} \right. \\ \left. \cdot H(t - sT_2) \right] \quad \text{----- (8.4.19)}$$

$$\left. \begin{aligned} n_0 &= \frac{C_a}{C_a + C_0} \quad , \quad n_r = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \\ \mu &= \frac{r_1 + r_2 - W}{r_1 + r_2 + W} \quad , \quad T_2 = 2T = 2W_a C_a \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (8.4.20)}$$

とする。この分圧方式では $r_1 C_a = r_2 C_0$ なる補償状態以外の使用法は稀と考へられるから $n_0 = n_r$ の場合だけ計算する。実施した計算中比較的興味のあるものを示せば、 μ 8.4.8図、 μ 8.4.9図、 μ 8.4.10図の如くなる。図は反射係数が比較的小さい場合の分圧特性であつて μ を0, $1/2$, $9/10$ の三種類に選んだ。図より明かす如く特性には不連続な振動的階段が附く。

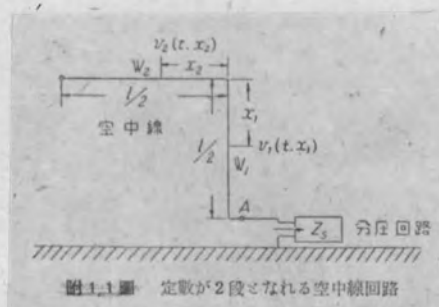
n_0 の値に不関 μ を大に取り、之を1に接近させる程階段の幅が狭くなり、凡そこの幅を $1-\mu$ と見積ることが出来る。実際の使用状態では、 $1-\mu$ が數%以上であれば分圧器として使用に適しい。若し空中線に減衰性が存在すればこの判限は緩和出来る。

8.5 空中線誘起電圧の不均一振動

8.5.1 誘起電圧の振動現象

分圧回路に対し、空中線全体は活性回路として働くものであるが、空中線の型状が電氣的に不均一であれば、この活性回路の内部に於て波動性の電気振動を惹起することは已むを得ない。この電気振動は空中線端子の整合如何に関らず発生し、誘起電圧の不均一及分布定数の不均一のみに関する。而してこの発生振動は空中線浮遊電圧 $V_0(p)$ を変歪させる。故に被測定電圧は既にして誤差を含む。次に最も單純な場合として空中線の実効全

0063



第 8・5・1 (図)

長が二個の相異なる波動インピーダンス部分に分割されるものとし、夫々に異なる電圧を誘起する場合発生する変位現象の算式を示すことにする。

8.5.2 不均一性振動の計算

第8.5.1図の如く空中線の水平部分の長さ l と垂直部分の長さ h とが相等的な実効状況为例に取る。今垂直部及水平部の波動抵抗を W_1 及 W_2 とし、之を一定値とする。而して外部電界が電位の変動を行った時、兩部分中 x_1 及 x_2 を有する点に $v_1(x_1)$ 及 $v_2(x_2)$ を有する誘起電圧を生起するものとする。簡單の爲空中線には一切減衰損失無きものとし、その波動傳播速度を c 、全長 l の傳播時間を $2T$ とす。

計算に順序を附す爲最初A点を浮遊した場合、この点に出現する電圧を求める。今この演算子函数形を $V_0(p)$ とすれば、活性回路に対する重畳の理の適用に依り

$$\left. \begin{aligned} V_0(p) &= V_1(p) + \frac{W_1}{W_1 + W_2} [V_2(p) - V_n(p)] \frac{1}{\sinh pT} \\ \text{但し} \quad V_1(p) &= \frac{1}{2} v_1(x_1) \left[\varepsilon^{-p(T - \frac{x_1}{c})} + \varepsilon^{-p(T + \frac{x_1}{c})} \right] \\ V_2(p) &= \frac{1}{2} v_2(x_2) \left[\varepsilon^{-p\frac{x_2}{c}} + \varepsilon^{-p(2T - \frac{x_2}{c})} \right] \\ V_n(p) &= \frac{1}{2} v_1(x_1) \left[\varepsilon^{-p\frac{x_1}{c}} + \varepsilon^{-p(2T - \frac{x_1}{c})} \right] \end{aligned} \right\} \text{---(8.5.1)}$$

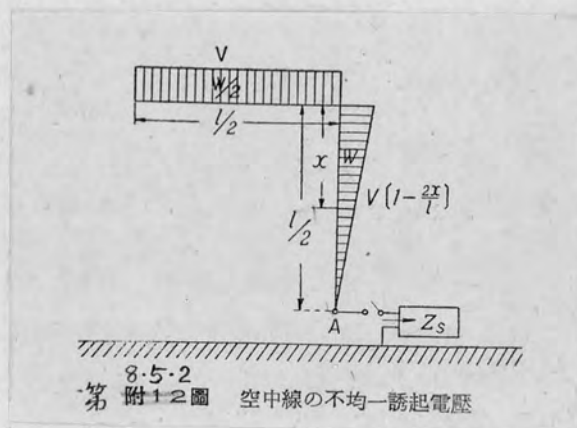
となる。次にA点より見た空中線インピーダンス $Z_A(p)$ とせば

$$\left. \begin{aligned} Z_A(p) &= \coth pT + (W_1 - W_m) \tanh pT \\ W_m &= \frac{W_1 W_2}{W_1 + W_2} \end{aligned} \right\} \text{---(8.5.2)}$$

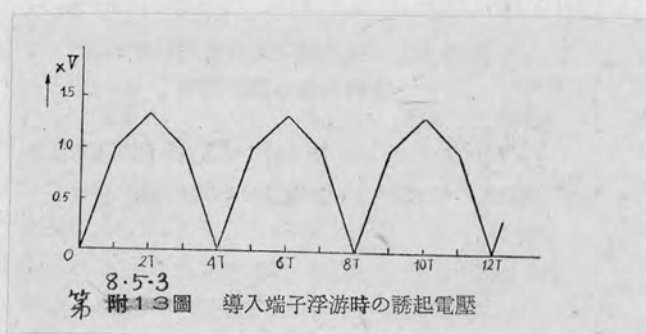
となる。仍つてA点に Z_s なる制動抵抗を挿入する時、この端子に出現する電圧を $V_s(p)$ とせば

$$\begin{aligned} V_s(p) &= \left[\frac{Z_s}{W_m} \frac{V_1(p)}{\eta_1 - \eta_2} \coth pT + \frac{Z_s}{W_2} \frac{V_2(p) - V_n(p)}{\eta_1 - \eta_2} \frac{1}{\sinh pT} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\frac{1}{\eta_2 + \coth pT} - \frac{1}{\eta_1 + \coth pT} \right] \right] \\ \left. \begin{aligned} \eta_1 \\ \eta_2 \end{aligned} \right\} &= \frac{Z_s \pm \sqrt{Z_s^2 - 4W_m(W_1 - W_m)}}{2W_m} \end{aligned} \text{---(8.5.3)}$$

となる。上式に於て



8.5.2
第 附 1 2 圖 空中線の不均一誘起電壓



8.5.3
第 附 1 3 圖 導入端子浮游時の誘起電壓

$$\mu_1 = \frac{\eta_1 - 1}{\eta_1 + 1}, \quad \mu_2 = \frac{\eta_2 - 1}{\eta_2 + 1} \quad \dots\dots\dots (8.5.4)$$

とすれば

$$V_s(p) = \frac{Z_s}{W_m} V_1(p) \frac{1}{(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1)} + \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_2^{v-1}(1 + \mu_2)}{\eta_2 + 1} - \frac{\mu_1^{v-1}(1 + \mu_1)}{\eta_1 + 1} \right) \varepsilon^{-2vTp} + \frac{2Z_s}{W_2} \frac{V_2(p) - V_n(p)}{\eta_1 - \eta_2} \left[\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_2^{v-1}}{\eta_2 + 1} - \frac{\mu_1^{v-1}}{\eta_1 + 1} \right) \varepsilon^{-(2v-1)Tp} \right] \quad \dots\dots\dots (8.5.5)$$

この演算を行へば $V_1(p)$, $V_2(p)$ 及 $V_n(p)$ が各々時間函数に、指数函数 $\varepsilon^{-(2v-1)Tp}$ が $H(t - \overline{2v-1}T)$ に変換され相乗演算形となる。次に單純を一例を取つて、変圧電圧の形狀を图示する事にする。

a. 空中線浮遊時の誘起電圧

以下の計算には、 $W_1 = 2W_2$ なりと假定し、空中線の初誘起電圧が第8.5.2 図の如く分布されて居る場合を例に取る。即ち

$$\left. \begin{aligned} v_1(x_1) &= V \left[1 - \frac{2x}{l} \right] \\ v_2(x_2) &= V \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8.5.6)$$

であるとする。空中線浮遊時の A 点の出現電圧を $v_0(t)$ とすれば之は (8.5.5) に於て $Z_s = \infty$ と取る事に依り得られる。即ち

$$\eta_1 = \frac{Z_s}{W_m} = \infty, \quad \eta_2 = 0$$

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = -1$$

故に、

$$v_0(t) = v_1(t, x_1) + \frac{4}{3} [v_2(t, x_2) - v_n(t, x_1)] \sum_{v=2}^{\infty} (-1)^{v-1} H(t - \overline{2v-1}T) \quad \dots\dots\dots (8.5.7)$$

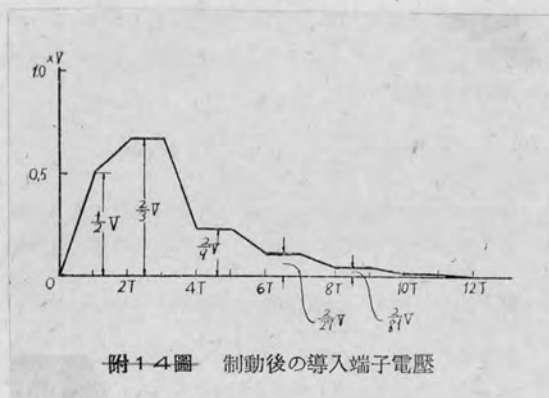
となり

$$v_1(t, x_1) = v_1(x_1) [H(t - \overline{T - x_1/g}) + H(t - \overline{T + x_1/g})]$$

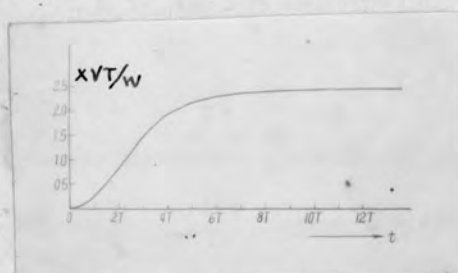
$$= V(1 - 2x/l) \{ H(t - \overline{T + 2x/l}) + H(t - \overline{T - 2x/l}) \}$$

$$v_2(t, x_2) = v_2(x_2) [H(t - \overline{x_2/g}) + H(t - \overline{2T - x_2/g})]$$

$$= V$$



第 8.5.4 図



$$\begin{aligned}
 v_n(t, x_1) &= v_1(x_1) [H(t - x_1/g) + H(t - 2T - x_1/g)] \\
 &= \sqrt{(1 - 2x/l)} \left\{ H(t - 2T \frac{x}{l}) + H(t - 2T - \frac{x}{l}) \right\} \\
 &\text{----- (8.5.8)}
 \end{aligned}$$

となる。両式を総合し結局が8.5.3図の如き図形を描く事が出来る。

b. $Z_S = W_1$ なる整合状態の出現電圧、

この場合の諸定数は

$$\eta_1 = 2, \quad \eta_2 = 1$$

$$\mu_1 = \frac{1}{3}, \quad \mu_2 = 0$$

となるから、この時のA点出現電圧を $v_s(t)$ とすれば

$$\begin{aligned}
 v_s(t) &= v_1(t, x_1) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} H(t - 2T) - \frac{4}{3} \sum_{v=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{v-1} H(t - 2vT) \right] \\
 &\quad + [v_2(t, x_2) - v_n(t, x_1)] \left\{ \frac{2}{3} H(t - T) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4}{3} \sum_{v=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{v-1} H(t - 2v - 1T) \right\} \text{----- (8.5.9)}
 \end{aligned}$$

となる。この場合の $v_1(t, x_1)$, $v_2(t, x_2)$, $v_n(t, x_1)$ は(8.5.8)と同一形式を取る。

この $v_s(t)$ を図示するとが8.5.4図の如くなる。

容量分圧器にあつては、実際に分圧器端子に出現する電圧は、 $v_s(t)/W$ の積分値である。即ちが8.5.5図となる。其の終局値は $2.5VT/W$ である。

一方空中線全静電容量 C_a は $3T/W$ なるを以て、この場合、空中線は実効静電容量 $2.5/3 C_a$ にて動作する事となる。

8.6 結 言

空中線分圧器の変歪現象を専ら空中線の波動性を主眼として論述した。

斯かる波動性への考慮は従来余り注意が拂はれておなかつた部面である。

施行した諸計算は總て空中線分圧器の設計に役立たしめるものを選んで故裨益する處は尠くないと信ずる。特に近似計算法を重視して、多數の便法を考案し紹介した。この内分圧特性の相乗近似法を見出した事は最も重要視すべきもので、この方法は空中線分圧器に固有する緩急兩様の過渡特性を相分離し相乗計算を以て一元化せしめるもので複雑な特性算式を著しく簡単にする事が出来る。之等理論的計算に加へ若干のパラメーターで數値計算を施行して空中線波動性に基く分圧特性の歪曲を明瞭をらしめた。記述する處に従ひ、抵抗、容量、抵抗容量分圧方式の各種を比較するに

最も優秀なものは抵抗容量分圧方式であると断定出来る。但し長期派生振動を抑止する爲に補助的考案、例へば空中線の導体抵抗を増し之に減衰性を附與する如きものが想到される。次で優良なものは抵抗分圧方式であるがこの方式は分圧回路の安定性、及測定導線の影響が問題となるので、恐らく使用不可であらう。容量分圧法は使用操作が最も平俗且つ安定であるのが長所である。尚、空中線の不均一分布定数による振動現象を吟味し、容量分圧方式に於ける特別な一創を取つて、數値計算を施行し其の変遷状況を明瞭ならしめた。

第 IX 章 変歪誤差の補正理論

9.1 諸言

分圧器、測定線、或は増幅器等の過渡的変歪誤差は、之を軽減する事が最も本質的な問題である。故に之を目的とし本章に至る迄の叙述を行つて来たのであるが、此処で矛針を交戦し誤差の補正法に就て記す事とする。

本法に關しては過去の研究諸家に於て、殆ど之を記す処が無い。僅かに本邦林重義博士に依り與へられた寄與¹⁾があるだけである。

変歪誤差の補正理論は極めて簡單な原理に基くのであるが、之が適用に當つては種々な困難に遭遇せざるを得ないのである。實際問題として、補正計算の操作自体に誤差を含み、この誤差によつて補正理論の適用限界が支配されて居る実情である。併し乍ら或る種の變歪誤差に対しては驚く程計算操作が簡單となるものであつて、斯様な消息を熟知する事に依り測定回路の構成法に一つの指標を持つ事が出来るのである。

本章では、補正法の原理と、補正操作に必要な補正函数をその定義と誘導法と與へ、又誤差特性を二分し、波頭変歪を有する場合と、然らざる場合の二者に就て補正函数を吟味する。特に單純な性質の補正函数の引出紹介を行ひ併せて實例に依る資料²⁾に就て其の補正函数の誘導を試みる。最後に補正操作自体の誤差を吟味する。

9.2 変歪誤差補正法の原理

先づ變歪誤差特性及其の補正函数の定義を明かにする。

(i) 單位函数狀原波 $H(t)$ に対し、 $t > 0$ に於て定數をらざる測定波 $f(t)$ を得れば、變歪特性は $f(t)$ である。

(ii) 單位函数狀測定波 $H(t)$ を得る爲に原波 $m(t)$ を必要とすれば、補正函数は $m(t)$ である。

極めて具体的に一つの測定回路を取り上げて定義内容を吟味すれば、 $f(t)$ は明かに、電圧比、電流比、若くは傳達インピーダンス、アドミッタンス等の物理的意味を有して居る。故に $f(t)$ は實驗的に之を測定する事が可能である。斯様に實驗的に決定した場合 $f(t)$ は物理現象の性質を完備した函数である。次に測定回路の等價回路が實驗的に與へられた場合には、その等價回路に依り理論的に $f(t)$ を定める事も出来る。即ち $f(t)$ の誘導法は二路存在する。而して $m(t)$ は結果から原因溯求の物理的意味にあり $f(t)$ と

1) 林:電学誌 62・642・20 (昭17-1)^(*) 及 鳥養・林:電評 30・325 (昭17-6)^(*)

は1対1の対応をなすが、人工的に假定された $H(t)$ 波を実現する爲に $m(t)$ は人工的な函数、即ち、実験的に実現不可能な函数であつても差支へない。例へば衝撃函数、或は $t < 0$ に現象を移動する変時要素を含有しても差支へない。 $f(t)$ と $m(t)$ とは相異なる關係をもち相乗定理の關係を以て書けば、

$$H(t) = m(t) * f(t) \quad \text{-----} (9.2.1)$$

である。 $f(t)$ 及 $m(t)$ 夫々の演算子函数を $F(p)$, $M(p)$ とすれば、

$$1 = M(p) \cdot F(p), \text{ 或は } M(p) = \frac{1}{F(p)} \quad \text{-----} (9.2.2)$$

である。基準回路が與へられた測定回路では、演算子函数で $F(p)$ を見出す事が容易であるから (9.2.2) に依り容易に $M(p)$ を導出し得る。若し実験的結果から $f(t)$ が與へられて居る場合には、現象演算法の相乗函数の誘導法を考慮する事に依り、

$$m(t) = \underbrace{1}_{f(t)} \quad \text{-----} (9.2.3)$$

として見出す事が出来る。茲に注意すべきは、補正函数を扱ふ場合には、通常形式の演算子法が取扱ふ時間領域を拡大せねばならぬ事であつて、演算子函数 $U_\nu(p)$ の変換は

$$U_\nu(p) = p \int_{-\infty}^{\infty} U_\nu(t) e^{-pt} dt \quad \text{-----} (9.2.4)$$

に立返つて行はれることである。その逆変換は従来慣用の儘とし改訂の必要は無い。通常演算子法では $0 \leq t$ 領域に於て存在する時間函数を対象とする故 (9.2.4) の積分下限は零に取られる習慣のあつた処である。併し乍ら補正函数を扱う場合には、 $t < 0$ に於て存在する函数も取扱ふから、上記の習慣は撤廃しをけねばならない。一般に $U_\nu(t)$ が

$$U_\nu(t) = U(t) \cdot H(t + t_\nu), \quad (t_\nu > 0) \quad \text{-----} (9.2.5)$$

である場合には

$$U_\nu(p) = p \int_{-t_\nu}^{\infty} U_\nu(t) e^{-pt} dt \quad \text{-----} (9.2.6)$$

であるべきである。同様にして相乗定理と

$$U_1(t) * U_2(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(t-\tau) U_2(\tau) d\tau \quad \text{-----} (9.2.7)$$

であり (9.2.5) が存在すれば

$$u_1(t) * u_2(t) = \frac{d}{dt} \int_{-t_2}^{t+t_1} u_1(t-\tau) u_2(\tau) d\tau \quad \dots (9.2.8)$$

である。之を従来も >0 領域のみ取扱ふ結果 $-\infty < t < 0$ 及び $t < t < \infty$ 領域の積分を脱落させる習慣があつた処である。

変歪特性 $f(t)$ は其の形状に二種類あり

α、波頭が直角立上り状のもの

β、波頭が傾斜立上り状のもの

の二者に分類出来る。両者の別で補正函数乃至補正操作に重要な区別が生じ、一般に後者の操作が前者より遙かに複雑となる。

9.3 直角波頭の変歪特性に対する補正函数

9.3.1 一般關係

F_0 を $f(t)$ の初期値とすれば、 $F(p)$ に特有の性質を生ずる。即ち

$$F(p) = A(p)/B(p)$$

である時一般に

$$A(\infty)/B(\infty) = F_0$$

である。他方 $M(p)$ は

$$M(\infty) = B(\infty)/A(\infty) = 1/F_0$$

とする。従つて

$$m(0) = 1/F_0$$

である。従つて $m(t)$ は衝撃函数を含み得る。

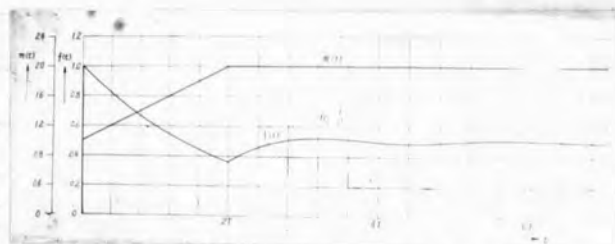
9.3.2 次に二つの例に対し $m(t)$ の形状を見出す事とする。

最単純変歪特性の補正函数

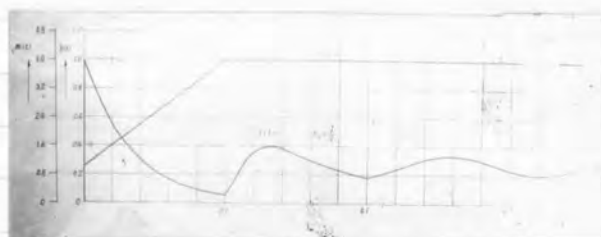
$$\left. \begin{aligned} f(t) &= F_0 \varepsilon^{-\alpha t} * H(t-T) \\ \text{或は} \quad F(p) &= F_0 \frac{p}{p+\alpha} \varepsilon^{-Tp} \end{aligned} \right\} \dots (9.3.1)$$

なる変歪特性が最も補正容易きものである。即ち其の補正函数は

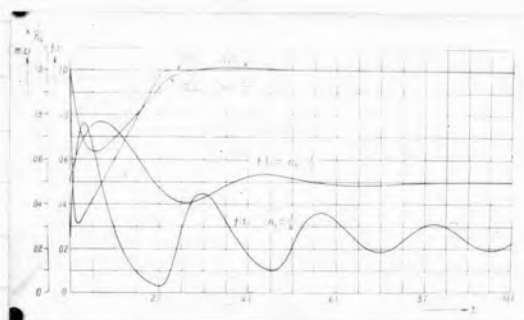
$$\left. \begin{aligned} M(p) &= F_0 \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right) \varepsilon^{Tp} \\ m(t) &= F_0 (1 + \alpha t) * H(t+T) \end{aligned} \right\} \dots (9.3.2)$$



第9.3.1圖 [1] $n_s = 1/2$ に於ける分圧特性及補正函数
(遅延導線)



第9.3.1圖 [2] $n_s = 1/4$ に於ける分圧特性及補正函数
(遅延導線)



第9.3.2圖 $n_s = 1/2$ 及 $1/4$ に於ける分圧特性及補正函数
(整合型補償遅延分圧線)

である。この $m(t)$ は測定波 $v(t)$ に相乗すると積分となって働くのである。即ち $v(t)$ を得た時の原波 $v_0(t)$ は

$$v_0(t) = v(t) * m(t) = F_0 \left[v(t) + \alpha \int_0^t v(\tau) d\tau \right] H(t+T) \quad \text{----- (9.3.3)}$$

で與へられる。

9.3.3 無損失遅延導線に対する補正函数

★VI章に記した如き遅延導線の変圧特性は (6.3.12) に示される如くであつて、其の演算子函数は若干の変形を加へ再録すれば、

$$F(p) = \frac{p}{p+\alpha} \frac{\varepsilon^{-Tp}}{1 - \frac{\alpha}{p+\alpha} \varepsilon^{-2Tp}} \quad \text{----- (9.3.4)}$$

である。従つて補正函数は

$$M(p) = \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right) \varepsilon^{Tp} - \frac{\alpha}{p} \varepsilon^{-Tp} \quad \text{----- (9.3.5)}$$

$$\text{或は } m(t) = (1 + \alpha t) * H(t+T) - \alpha t * H(t-T) \quad \text{---- (9.3.6)}$$

とする。この形式は頗る單純であつて、第VI章第6.4.1 図に示した計算例に倣ひ、 $\eta_s = \frac{1}{2}$ 及 $\eta_s = \frac{1}{4}$ する時の $m(t)$ の形状を示せば、★9.3.1 図 [1] [2] の如くなる。この様子を視察して、遅延導線は変圧特性は悪いが、補正操作は簡單であるとの結論を引出す事が出来る。

9.3.4 無損失遅延分圧線の補正函数

整合型補償を施行された場合を取り上げる。この場合の分圧特性は (6.3.15) と (6.3.28) の如くであつて、其の演算子函数は

$$F(p) = \frac{\eta_s p + 2\alpha}{p + 2\alpha} \cdot \frac{(\eta_0 p + \alpha)p}{(p + \alpha)^2} \cdot \frac{\varepsilon^{-Tp}}{1 - \left(\frac{\alpha}{p+\alpha}\right)^2 \varepsilon^{-2Tp}} \quad \text{----- (9.3.7)}$$

である。 $\eta_s = 2\eta_0$ であつて之より補正函数を見出せば、

$$M(p) = \frac{2}{\eta_s} \frac{(p+\alpha)^2}{p(p+\frac{2\alpha}{\eta_s})} \varepsilon^{Tp} - \frac{\alpha^2}{p(p+\frac{2\alpha}{\eta_s})} \varepsilon^{-Tp} \quad \text{----- (9.3.8)}$$

或は

$$m(t) = \frac{2}{\eta_s} \left[\left(\frac{\eta_s}{2}\right)^2 (1 + \alpha_s t - \varepsilon^{-\alpha_s t}) + \varepsilon^{-\alpha_s t} \right] * H(t+T) \\ + \frac{2}{\eta_s} \left[\left(\frac{\eta_s}{2}\right)^2 (1 - \alpha_s t - \varepsilon^{-\alpha_s t}) \right] * H(t-T) \quad \text{--- (9.3.9)}$$

である。

形状は遅延導線に比べやゝ複雑であるが、容易に計算計算を遂行し得る性質を持つ。 $\eta_0 = 1/2$ 及 $1/4$ の場合に就て前例同様数値計算した結果を示せば図9.3.2図り如くである。

9.4 非直角波頭の変歪特性に対する補正函数

9.4.1 一般関係

誘電体損失、表皮作用等を含む測定線の減衰損失、或は遅延導線容量等の影響で、変歪特性が直角波頭を有しない場合が屢々ある。厳密に変歪特性が直角波頭を有せざるとも、補正の重要性如何に依り、直角波頭と同一に取扱つて差支へ無い場合も屢々であるが、特に測定波の急激な変化部分の補正を充分にするには非直角波頭の変歪特性の補正函数は、之を特別に考慮しないといふ不可である。

今変歪特性 $F(p)$ に対し

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^n F(p) = F_0^{(n)} \quad \text{----- (9.4.1)}$$

である時 $f(t)$ に対しても同様に

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right|_{t=0} = F_0^{(n)} \quad \text{----- (9.4.2)}$$

の関係がある。

$1/F(p)$ に対し Laurent 展開が成立するものとするれば、

$$M(p) = \sum_{\nu=1}^n M_0^{(\nu)} p^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} M_\nu p^{-\nu} \quad \text{----- (9.4.3)}$$

として表される。茲に $M(p)$ は $1/F(p)$, $M_0^{(\nu)}$, M_ν は夫々係数である。故に補正函数は

$$m(t) = \sum_{\nu=1}^n M_0^{(\nu)} S^{(\nu)}(t) + \tilde{m}'(t) \quad \text{----- (9.4.4)}$$

とする。茲に $S^{(\nu)}(t)$ は ν 次の衝撃函数であり $\tilde{m}'(t)$ は

$$\tilde{m}'(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} M_\nu p^{-\nu} \frac{e^{pt}}{p} dp \quad \text{----- (9.4.5)}$$

である。 $\tilde{m}'(t)$ なる記号は $m(t)$ に於ける衝撃函数を脱落させたものなる意味を有する。

測定波 $v(t)$ を得て、原波 $v_0(t)$ を見出す計算操作は

$$v_0(t) = \sum_{\nu=1}^n M_0^{(\nu)} \frac{d^\nu}{dt^\nu} v(t) + \tilde{m}'(t) * v(t) \quad \text{----- (9.4.6)}$$

とする。即ち $v(t)$ に対し n 次の微分操作を行って、補正目的を達するのである。 n が無限大となる測定回路に対しては斯かる補正法は用ひられない。

然し実在する被観測物では、斯様な場合を生じない。即ち、観測結果を基準とする立場に基けば、 n は必ず有限値として現れる。併し、観測装置の原理的誤差、波形分解誤差等の不可避的誤差を伴い、この結果補正操作自体の誤差を生ずる。

9.4.2 複指数函数状変歪誤差の補正函数

最単純形式として、次の変歪特性の補正函数を考へる。

$$f(t) = F_0 (\varepsilon^{-\beta t} - \varepsilon^{-\alpha t})$$

其の演算子函数は

$$F(p) = F_0 \frac{(\alpha - \beta)p}{(p + \alpha)(p + \beta)} \quad \text{----- (9.4.7)}$$

故に其の逆函数は

$$M(p) = \frac{1}{(\alpha - \beta)F_0} \left[p + (\alpha + \beta) + \frac{\alpha\beta}{p} \right] \quad \text{----- (9.4.8)}$$

其の時函数、即ち補正函数は

$$m(t) = \frac{1}{F} \left[\frac{S(t)}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} t \right] \quad \text{----- (9.4.9)}$$

とする。故に $v(t)$ を観測した時の補正操作は

$$\begin{aligned} v_0(t) &= m(t) * v(t) \\ &= \frac{1}{F} \left[\frac{v'(t)}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} v(t) + \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} \int_0^t v(\tau) d\tau \right] \quad \text{----- (9.4.10)} \end{aligned}$$

とする。之は前に述べた、直角立上り波頭の最単純変歪誤差の補正操作に微分操作を追加した形式となり最も操作容易な補正函数である。

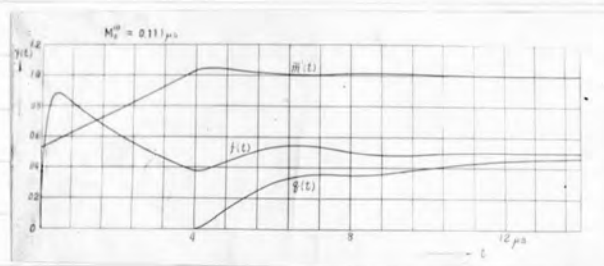
9.4.3 遷延導線の实测変歪特性に対する補正函数の計算例

損失の無い場合に就て検討した結果は前述の(9.3.6)の如くである。然るにケーブルの实测記録に依れば、傾斜立上り状の波頭変歪を生じて居る。

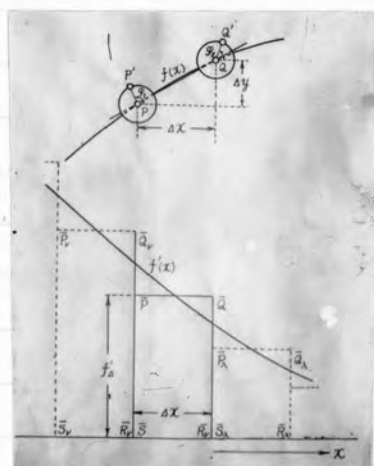
$n_s = 1/2$ に対するものを転寫すれば、オ9.4.1図の如くである。この変歪特性の波頭部分は $(\varepsilon^{-bt} - \varepsilon^{-at})$ 波に概ね合致する。故に展開の核函数を

$$g(t) = \varepsilon^{-b} - \varepsilon^{-at}, \text{ 或は } Q(p) = \frac{(a-b)p}{(p+a)(p+b)} \quad \text{----- (9.4.11)}$$

に選定する。オシログラムより、



第9.4.1圖 遅延導線の実際変遷特性と其の補正函数



第9.5.1圖 微分誤差の図形的表示

$$a = 9.30 \mu s^{-1}, \quad b = 0.244 \mu s^{-1}$$

である。 $f(t)$ と $g(t)$ の差 $\delta(t)$ はオ 9.4.1 図下部に示した如き曲線である。

而して

$$\begin{aligned} \tilde{g}(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{1}{Q(p)} \frac{e^{pt}}{p} dp \\ &= \frac{S(t)}{a-b} + \frac{a+b}{a-b} + \frac{ab}{a-b} t \end{aligned} \quad (9.4.12)$$

である。故に $f(t)$ の相互函数を現象演算法に依り導出すれば、

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{1}{a-b} \frac{d}{dt} u(t) + \frac{a+b}{a-b} u(t) + \frac{ab}{a-b} \int_0^t u(\tau) d\tau \\ u(t) &= H(t) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left[\frac{\delta'(t)}{a-b} + \frac{a+b}{a-b} \delta(t) + \frac{ab}{a-b} \int_0^t \delta(\tau) d\tau \right]^{*r} \end{aligned} \quad (9.4.13)$$

となる。 $\delta(t)$ は連続であつて $\delta'(t)$ は有限確定に存在する。

今 $m(t)$ を二部分に分割し

$$m(t) = M_0^{(1)} S(t) + \tilde{m}'(t) \quad (9.4.14)$$

として表す時は

$$\begin{aligned} M_0^{(1)} &= \frac{1}{a-b} \\ \tilde{m}'(t) &= \frac{a+b}{a-b} u(t) + \frac{ab}{a-b} \int_0^t u(\tau) d\tau + \frac{1}{a-b} \frac{d}{dt} \{u(t) - H(t)\} \end{aligned} \quad (9.4.15)$$

とする。積分、相乗計算、及微分を總て図形的に行ひ、求め得た $\tilde{m}'(t)$ の形状を図示すればオ 3.2.3 図に示す如くする。 $M_0^{(1)} S(t)$ は図形的に描示し得るが、 $M_0^{(1)}$ の値は $0.111 \mu s$ である。斯くて測定波 $v(t)$ を得た場合の原波 $v_0(t)$ は

$$v_0(t) = M_0^{(1)} v'(t) + \tilde{m}'(t) * v(t) \quad (9.4.15)$$

となる。

9.5 補正誤差の検討

9.5.1 分解能

補正操作に随伴する誤差の根本的な原因は、測定波を表現するオシログラムに或る最小分解能の極限が存在する事実に據る。この最小分解能とは

隣接して二本の平行掃引線を引き其の相互が区別出来なくなる距離を以て定義すべきである。陰極線オシログラムでは輝度像に濃淡があるので、分解能は輝度見掛直径の數分の一となる。

9.5.2 偏位誤差

一定の最小分解能 δ を有するオシログラムに於て、一定の偏位 d に対する関係誤差率を偏位誤差 ε_d と名付ければ、

$$\varepsilon_d = \pm \frac{\delta}{d}$$

である。

9.5.3 微分誤差

補正計算実施時、其の操作限界を支配する最大因子がこの微分誤差である。測定波乃至現象函数を微分操作する手法は種々あらうが、此処では9.5.1 図上の如く、現象波 $f(x)$ の略直線状部分に $\overline{PQ} = n\delta$ を以て測量し、其の横軸長 Δx 及縦軸長 Δy の比を高さとして同図下の如く一つの矩形を作り、任意の位置 λ に於て、この測量を繰返し矩形 $\overline{P_\lambda Q_\lambda R_\lambda S_\lambda}$, $\overline{P_\lambda Q_\lambda R_\lambda S_\lambda}$ 等の係列を作り、最後に之等の矩形の余剰面積の平均位置を通過する曲線 $f'_\Delta(x)$ を造るものとする。分解能に依り、点 P, Q を $f(x)$ 上に求める際 $\delta/2$ を半径とする円領域内に位置誤差を生ずる。最大誤差を見積る爲、 $P'Q'$ なる円縁位置に測量点が落ちた場合の近似微分 f'_Δ を検討すれば、

$$\begin{aligned} f'_\Delta &= \frac{n\delta \sin \theta + \delta \sin \varphi_1 - \delta \sin \varphi_2}{n\delta \cos \theta + \delta \cos \varphi_1 - \delta \cos \varphi_2} \\ &= \tan \theta \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}{\sin \theta} - \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\cos \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n^2} \left[\frac{(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)}{\cos \theta \sin \theta} - \frac{(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)^2}{\cos^2 \theta} \right] \right\} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$1/n^2$ を係數に持つ項以下を省略し $1/n$ を持つ項が極大となる条件を求めれば

$$\varphi_1 \pm \frac{\pi}{2} = \theta, \quad \varphi_2 \mp \frac{\pi}{2} = \theta$$

であり、この時の近似微分 f'_Δ は次の如くなる。

$$f'_\Delta \doteq \tan \theta \left[1 \pm \frac{1}{n} (\cot \theta + \tan \theta) \right]$$

$\tan \theta$ は真値であるから $(\cot \theta + \tan \theta)/n$ が誤差項を與へる。之より

が大小何れに傾くも誤差は大となり、誤差最小なる θ は $\pi/4$ であることが判る。多くの場合、補正操作に出て来る現象函数の微分函数は、其の値が他の非微分値と共に總和される形式となる事が多いので、 θ が小さい側の誤差は $\tan \theta$ が縮小する為影響が小さい。夫故問題となるものは常に θ が $\pi/4$ より大きき側の誤差である。現象演算実施に當り、其の限度を支配するものは、微分誤差の混入率であつて、然るこの誤差は極めて起り易い。

9-5-4 積分誤差

積分及相乗計算の操作に現れる積分誤差率 $\varepsilon_i, \varepsilon_f$ は、特定函数に対しては之を見積る事が出来る。即ち $f(t)$ を函数とし

a. 積分の時

$$\varepsilon_i = \frac{\pm \int_0^t f(\tau) \varepsilon_d(f_0(\tau)) d\tau}{\int_0^t f_0(\tau) d\tau}$$

b. 相乗の時

$$\varepsilon_f = \frac{\frac{d}{dt} \int_0^t f_1(t-\tau) \varepsilon_d(f_1(t-\tau)) f_2(\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_0^t f_2(t-\tau) \varepsilon_d(f_2(t-\tau)) f_1(\tau) d\tau}{\frac{d}{dt} \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau}$$

である。 $f_1(t)$ が定数の時は偏位誤差に一致する。即ち

$$\varepsilon_i = \varepsilon_d \quad \varepsilon_f = (1 \pm \varepsilon_d)^2 - 1 \div \pm 2\varepsilon_d$$

である。

9-4 結 言

変歪誤差が存在する測定回路に於て誤差の補正を行ひ得る事實は從來不可能視して捨てられてゐた測定領域を可能領域と化するものである。又変歪の存在を取り入れて、低く見積られる測定精度を一段と高め得るものである。本章では斯かる有用性を保持して居る補正計算法に就て其の原理、計算操作法を述べた。

先づ補正法の原理に於ては、変歪特性の相互函数を見出す事が取りも直さず補正函数である事、其の誘導法には、演算子函数法と現象演算法の二路ある事を紹介し、補正操作上には直冲波頭のものゝ傾斜波頭のものゝ二種類に分類吟味した。特に補正操作の單純な変歪特性の例として、單一指數函数狀及複指數函数狀のものが、積分及微分操作を以て補正を施行し得る事を示し、尚無損失遅延導線の變歪誤差も同様簡單に補正し得る事を示

した。この他数種の例に対し補正函数を図形的に與へた。傾斜波頭の変態特性は微分操作が從属する事情及其誤差が補正誤差を支配する事實を明かにし、尚補正自体の誤差に就て調べ、オシログラムの分解能が誤差因子である事を指摘し、偏位誤差、微分誤差、積分誤差を定量的に定めた。

参考文献

- (1) J.R.Carson: Electrical Circuit Theory & The Operational Calculus (1926)
- (2) 福田: 3工大 28-(24) (昭11-5)
- (3) 福田: 電学誌 56·580-1130 (昭11)
- (4) 福田: 電学誌 56·581-1190 (昭11)
- (5) 鳥養, 林, 岩本, 竹村: 19 聯大 (昭16-9)
- (6) 林, 河村, 岩本, 山本, 吉久保, 中西: 電評 31 706 (昭18-12)
- (7) Nerken: EE 56, 768 (1937)
- (8) 林: 電学誌 57·589 686 (昭12-8)
- (9) F, Williams: W Eng 17 189 61 (1940)
- (10) 只野: 電試研 444号
- (11) 林, 近藤, 岩本, 川口, 山田, 香川: 電評 36 13 (昭23-6)
- (12) L.V. Bewley: Travelling wave on Transmission System (1933)
- (13) 林: 電評 29·121 (昭16-2)
- (14) G.Doetche: Theorie u Anwendung d Laplace-Transformation (1937)
- (15) J.A.Stratton: Electro Magnetic Theory (1941)
- (16) K.Wagner: Operatorenrechnung (1940)
- (17) K.Dahr: Integrational & Operational Calculus (1935)
- (18) T.V.Karman: Mathematical Method in Engineering (1940)
- (19) 桜井: 電評 29 412 (昭16-6)
- (20) H.W.Droste: T.F.T 28·89 (1939)
- (21) L.A.Pipes: Physics 10 172 258 & 301 (1939)
- (22) McLachlan: Complex variable & Operational Calculus Technical Applications (1939)
- (23) 小幡: 岩波物理実験学4 音響篇 336 (昭16)
- (24) 森脇: 電通学誌 28·177 (昭19-6)
- (25) 鳥養, 林, 岩本: 22 聯大 3 (昭18-4)
- (26) Burch: Phil Mag 13 760 (1932)
- (27) 日本學術振興会才九特別委員会才=分科会報告: I(昭15) II(昭16) III(昭17)
- (28) A.M.Angelini: A.S.E. 32 14 305 (18 Tuillet 1941)
- (29) Pleijel: Teknisk Tidskr (E) 48 (1918)
- (30) 林: 電学誌 57·586 362 (昭12)
- (31) 鳥養, 林, 岩本: 電学誌 63, 662 597 (昭18-8)
- (32) 岩本: 電評 31 295, 359, 438 & 504 (昭18-5, 6, 7, 8)
- (33) W.Watt: Proc Roy Soc A 103 (1923)

- (34) H. Norinder: TFI 218 717 (1934)
- (35) 林: 電学誌 62. 642 20 (昭17-1)
- (36) 鳥養, 林, 岩本: 電評 30. 325 (昭17-6)
- (37) 林鶴一: 級數總和法 (昭4)

附 録

- I 相乗級数の収斂条件
- II $Q_n(\zeta, Z)$ 函数の図表

附 録

I

相乗冪級数の収斂条件

10.1 相乗冪級数の収斂条件

時間域 $0 < t \leq T$ に於て存在する時間函数 $u(t)$ を取った場合

$$\varphi(t) = u(t) + u(t)^{*2} + u(t)^{*3} + \dots \quad (10.1.1)$$

を $u(t)$ の相乗冪級数と稱する。この級数が絶対収斂にして和 $\varphi(t)$ が存在する爲の條件は

$$u(+0) < 1 \quad (10.1.2)$$

である。 $u(t)$ に與へらる制限は $0 < t \leq T$ に於て有限確定値を有する事、 $x=t$, $y=u(t)$ なる直交座標に描示した $u(t)$ 曲線の全長 L が有限なる事である。

若し一般に常数係数 a_ν を有する相乗冪級数

$$\varphi_a(t) = a_1 u(t) + a_2 u(t)^{*2} + a_3 u(t)^{*3} + \dots \quad (10.1.3)$$

を取る時、この級数が絶対収斂なる條件は、級数

$$a_1 u(+0) + a_2 u(+0)^2 + a_3 u(+0)^3 + \dots \quad (10.1.4)$$

が絶対収斂なる條件と相等しい。次に其の證明を與へる。

10.2 $u(t)$ の断片的表示形式に依る収斂条件の證明

$u(t)$ を時間隔 $\tau = T/r$ (r は整数) に分割し

$$\begin{aligned} u_r(t) = & u_0 \cdot H(t) + u'_1(\tau - \theta_1 \tau) \tau \cdot H(t - \tau) + u'_2(2\tau - \theta_2 \tau) \tau \cdot H(t - 2\tau) \\ & + \dots + u'_\nu(\nu \tau - \theta_\nu \tau) \tau \cdot H(t - \nu \tau) + \dots \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

$$0 \leq \theta_\nu \leq 1, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

を以て $u(t)$ の断片的表示を行ふものとする。然る時 $r \rightarrow \infty$ をらしめれば、級数は限り無く $u(t)$ に接近する。即ち

$$u(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} u_r(t) \quad (10.2.2)$$

である。記法を簡單にする爲

$$u'_\nu(\nu \tau - \theta_\nu \tau) \cdot \tau = u_\nu \quad (10.2.3)$$

と書く事とする。然る時は

$$u_r(t) = u_0 \cdot H(t) + \sum_{\nu=1}^r u_\nu \cdot H(t - \nu \tau) \quad (10.2.4)$$

となる。こゝで若し $r\tau < t < (r+1)\tau$ なる場合を取り上げるものとするれば、

$$u_r(t) = u_0 \cdot H(t) + \sum_{\nu=1}^r u_\nu \cdot H(t - \nu \tau) \quad (10.2.5)$$

となり総和上限は r に限定される。

次に一般項として $u_r(t)^{*n}$ の乗積計算を行へば次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 u_r(t)^{*n} &= u_0^n \cdot H(t) + \sum_{\lambda_1=1}^{n-1} \binom{n}{\lambda_1} u_0^{n-\lambda_1} u_1^{\lambda_1} \cdot H(t-\lambda_1 \tau) \\
 &+ \sum_{\lambda_1=1}^{n-1} \sum_{\lambda_2=1}^{\lambda_1-1} \binom{n}{\lambda_1} \binom{\lambda_1}{\lambda_2} u_0^{n-\lambda_1} u_1^{\lambda_1-\lambda_2} u_2^{\lambda_2} \cdot H(t-\overline{\lambda_1+\lambda_2} \tau) \\
 &+ \sum_{\lambda_1=1}^{n-1} \sum_{\lambda_2=1}^{\lambda_1-1} \sum_{\lambda_3=1}^{\lambda_2-1} \binom{n}{\lambda_1} \binom{\lambda_1}{\lambda_2} \binom{\lambda_2}{\lambda_3} u_0^{n-\lambda_1} u_1^{\lambda_1-\lambda_2} u_2^{\lambda_2-\lambda_3} u_3^{\lambda_3} \cdot H(t-\overline{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \tau) \\
 &+ \dots \dots \dots \\
 &+ u_1^n \cdot H(t-n\tau) + \sum_{\lambda_2=1}^{n-1} \binom{n}{\lambda_2} u_1^{n-\lambda_2} u_2^{\lambda_2} \cdot H(t-\overline{2n+\lambda_2} \tau) \\
 &+ \sum_{\lambda_2=1}^{n-1} \sum_{\lambda_3=1}^{\lambda_2-1} \binom{n}{\lambda_2} \binom{\lambda_2}{\lambda_3} u_1^{n-\lambda_2} u_2^{\lambda_2-\lambda_3} u_3^{\lambda_3} \cdot H(t-\overline{2n+\lambda_2+\lambda_3} \tau) \\
 &+ \dots \dots \dots \\
 &+ u_2^n \cdot H(t-2n\tau) + \sum_{\lambda_3=1}^{n-1} \binom{n}{\lambda_3} u_2^{n-\lambda_3} u_3^{\lambda_3} \cdot H(t-\overline{3n+\lambda_3} \tau) \\
 &+ \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

----- (10.2.6)

$$\lambda_1 = 1, 2, 3, \dots, \quad \lambda_2 = 1, 2, 3, \dots, \quad \dots \dots$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 + 1, \quad \lambda_2 \geq \lambda_3 + 1, \quad \dots \dots$$

而して $t = r\tau + 0$ 或は $r\tau < t < \overline{r+1}\tau$ の間の値を問題に取り上げて居るから、 $H(t-\lambda\tau)$ に於て $\lambda > r$ なる項は凡て消失する。今若し $r \ll n$ なりとし、 M を任意に大なる数とし、 $n/r > M$ に選ぶ時は $r \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$ の両極限に於て、斯かる条件を挿入すべきを考慮しつつ、 $u_r(t)^{*n}$ を展開すれば

$$\begin{aligned}
 u_r(t)^{*n} \Big|_{t=r\tau+0} &= u_0^n + \binom{n}{1} u_0^{n-1} u_1 \\
 &+ \binom{n}{2} u_0^{n-2} \{ u_1^2 + \binom{2}{1} u_1 u_2 \} \\
 &+ \binom{n}{3} u_0^{n-3} \{ u_1^3 + \binom{3}{1} u_1^2 u_2 + \binom{3}{2} u_1 u_2^2 + \binom{3}{2} \binom{2}{1} u_1 u_2 u_3 \} \\
 &+ \dots \dots \dots \\
 &+ \binom{n}{r-2} u_0^{n-r+2} \{ u_1^{r-2} + \binom{r-2}{1} u_1^{r-3} u_2 + \binom{r-2}{2} u_1^{r-4} u_2^2 \} \\
 &+ \binom{n}{r-1} u_0^{n-r+1} \{ u_1^{r-1} + \binom{r-1}{1} u_1^{r-2} u_2 \}
 \end{aligned}$$

$$+ \binom{n}{r} u_0^{n-r} u_1^r$$

----- (10.2.7)

となる。

$u(t)^{*n+1}$ と $u(t)^{*n}$ を比較するに $n \rightarrow \infty$ 近傍に於ては

$$\left. \binom{n+1}{r-\nu} \right|_{n \rightarrow \infty} = \frac{n+1}{n-r+\nu} \left. \binom{n}{r-\nu} \right|_{n \rightarrow \infty} \simeq \binom{n}{r-\nu} \quad \text{----- (10.2.8)}$$

$$M_1 < r < M_2$$

である。故に L 有限なる假定より $u_1, u_2, \dots < \varepsilon_0$ なるは明かなるを以て、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{u_r(t)^{*n+1}}{u(t)^{*n}} \right|_{t=\nu t+0} &= u_0 \frac{u_0^n + \sum_{\nu=1}^r \frac{n+1}{n+1-\nu} \binom{n}{\nu} u_0^{n-\nu} u_1^\nu + \dots}{u_0^n + \sum_{\nu=1}^r \binom{n}{\nu} u_0^{n-\nu} u_1^\nu + \dots} \\ &= u_0 \quad \text{----- (10.2.9)} \end{aligned}$$

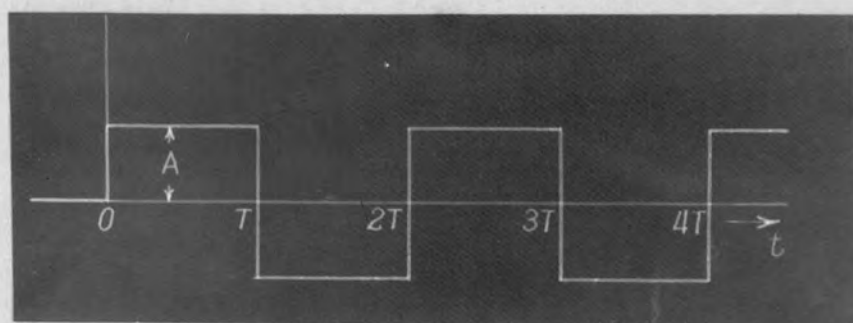
となる。前記の如く $M \rightarrow \infty$ ならしめつつ $r \rightarrow \infty$ ならしめる時には、 $u_r(t)$ は限り無く $u(t)$ に接近し $u(t)$ の断片的表示は、充分連続化し得られる。斯くして項比を以て $\sum u(t)^{*n}$ の収斂条件は明確に決定され

$$u_0 < 1, \quad \text{即} \quad u(+0) < 1 \quad \text{----- (10.2.10)}$$

が求める答となる。(10.2.9)より

$$\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} \left. u(t)^{*n+1} \right|_{t=T} = u(0) \cdot u(t)^{*n} \quad \text{----- (10.2.11)}$$

なる関係を得るから (10.1.3) の如き一般級数の収斂条件は (10.1.4) となる。



附錄第1圖 矩形状周期函数

10.3 特別なる函数の収斂状況例

前述の結果に於て證明された如く相乗冪級数はその初期値だけで収斂が支配される。これは一見洵に奇異とも感ぜられる性質である。實際上屢々収斂が非常に遅い場合があり、輕率に之を發散するものと誤断する懼れも無しとしない。故に爰に収斂性の遅い級数の一つと認められる第10.3.1圖の如き矩形波周期函数の収斂状況を判別して見やう。

この函数は

$$u(t) = A \left\{ H(t) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} H(t-T)^{* \nu} \right\} \quad \text{----- (10.3.1)}$$

として表される。この $u(t)$ は別の形式に於て表現可能で

$$u(t) = A \left\{ H(t) - H(t-T) \right\} * \left\{ H(t) + H(t-T) \right\}^{*-1} \quad \text{----- (10.3.2)}$$

となる。

この n 相乗を取れば

$$\begin{aligned} u(t)^{*n} &= A^n \left\{ H(t) + \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} \frac{n!}{(n-\nu)! \nu!} \cdot H(t-\nu T) \right. \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{(n+\lambda-1)!}{(n-1)! \lambda!} H(t-\lambda T) \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\nu+\lambda} \frac{n!}{(n-\nu)! \nu!} \cdot \frac{(n+\lambda-1)!}{(n-1)! \lambda!} \cdot H(t-\overline{\nu+\lambda} T) \right\} \\ &\quad \text{----- (10.3.3)} \end{aligned}$$

となる。時間領域は有限に限定されるを以て M を任意數とする時 $m < M$ ならしめ

$$mT < t < (m+1)T$$

に於ける $u(t)^{*n}$ の値は $H(t-mT)$ を含む項迄の各項の總和にて與へられる。然るに

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^m (-1)^{\nu} \frac{n!}{(n-\nu)! \nu!} &= (-1)^m \frac{(n-1)!}{(n-m-1)! m!} - 1 \\ \sum_{\nu=1}^m (-1)^{\nu} \frac{(n+\nu-1)!}{(n-1)! \nu!} &= (-1)^m \frac{(n+m+2)!}{(n-2)! m!} - 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (10.3.4)}$$

となる。¹⁾ 故に

$$(u(t)^{*n})_{mT < t < (m+1)T} = A^n \left\{ (-1)^m \left\{ \frac{(n-1)!}{(n-m-1)! m!} + \frac{(n+m+2)!}{(n-2)! m!} \right\} - 1 \right\}$$

1) 例へば 林鶴一：級数總和法 (昭4) (37)

$$+ \sum_{s=1}^{m-1} \left\{ \frac{(-1)^{m-s} (n-1)!}{(n-m+s-1)! (m-s)!} - 1 \right\} \left\{ \frac{(-1)^s (n+s-2)!}{(n-2)! s!} - 1 \right\} \quad (m < n) \quad \text{----- (10.3.5)}$$

となる。

以上で明かす如く $u(t)^{*n}/A^n$ の値は n が大である時、之に接近した n に於て著しく大きく、その値が n の増大するにつれ切捨可能な程度に縮小するか否かは全く A の値に依存してゐる。故に A が 1 に接近して居る時は $u(t)^{*n}$ と $u(t)^{*n+1}$ の比は n が小さい時に一時非常に大きく、總和を求めるに殆ど絶望的となる。 $A < 1$ で且つ m が一定値より小さい時に始めて實用し得るに至るものである。(10.3.5) に於て $m < M$ なる時には、 $n \rightarrow \infty$ に於て $u(t)^{*n+1}$ は $A u(t)^{*n}$ に収斂し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u(t)^{*n+1}}{u(t)^{*n}} \right| = A \quad \text{----- (10.3.6)}$$

となる。即ち $A < 1$ に於て $\sum u(t)^{*n}$ は絶対収斂する。

其の収斂状況を判定する爲一例として $n=20$, $m=10$ の場合を取り $|u(t)^{*20}| \leq 0.01$ ならしむる如き A の値及此の場合の項比 $|u(t)^{*21}|/|u(t)^{*20}|$ の値を算出すれば (10.3.5) に於て

$$|u(t)^{*20}| \doteq 1.37 \cdot 10^7 \cdot A^{20}$$

であるから、第 20 相乗を 0.01 より小ならしめる條件として

$$A \leq 0.350$$

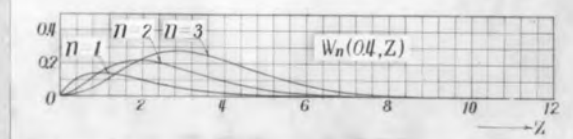
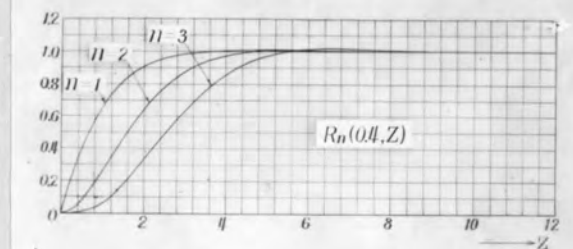
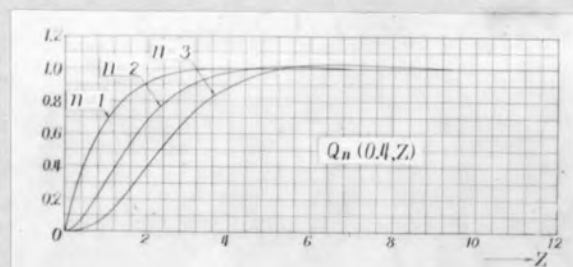
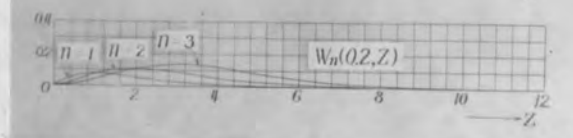
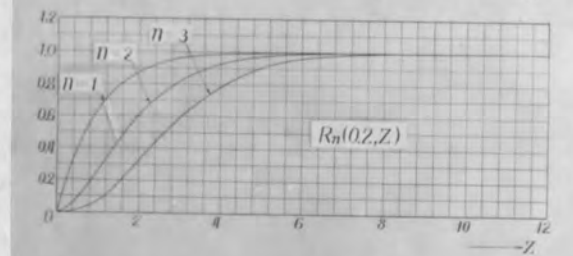
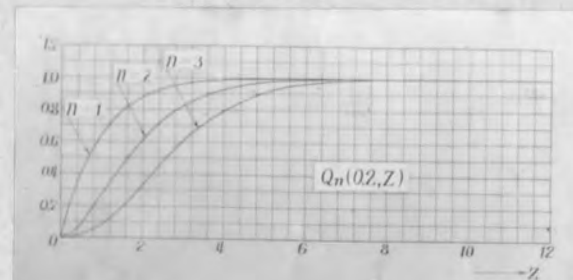
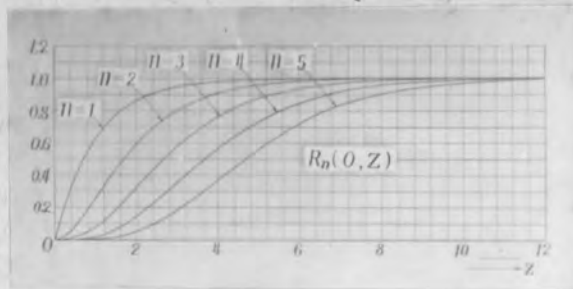
を得る。この時の項比は

$$\left| \frac{u(t)^{*21}}{u(t)^{*20}} \right|_{t=10T} \leq 0.534 < 1$$

となる。之を逆に云へば $A = 0.35$ の値を以て、 $m=10$ 附近の總和を計算する場合、若し $n=20$ で打ち切れば

$$\epsilon_n < 0.01 \times \frac{0.534}{1-0.534} = 0.0115$$

程度の誤差を発生する。其の他の場合も以上に準い収斂程度及誤差を見積る事が出来る。



$\dot{Q}_n(\zeta, Z)$ 函数の図表

11.1 図表の範囲

$\dot{Q}_n(\zeta, Z)$ 函数の定義形及其の性質は (4.5.3) 及 (4.5.6) 以下に示した如くである。以下示す図表は $\dot{Q}_n(\zeta, Z)$ 函数の数值計算を実施し、其の三部分即ち $R_n(\zeta, Z)$ と $W_n(\zeta, Z)$ 函数及び

$$Q_n(\zeta, Z) = \sqrt{R_n(\zeta, Z)^2 + W_n(\zeta, Z)^2} \quad \text{-----} \quad (11.1.1)$$

を與へた。

数值計算は $Z=0.2$ の間隔を以て $Z=0 \sim 12$ の範囲を、又 $\zeta=0.2$ の間隔を以て $\zeta=0 \sim 2.0$ 迄のものを $n=1, n=2, n=3$ の三つの場合に就て計算した。尚 $R_n(0, Z)$ は $Q_n(0, Z)$ に等しく、この場合は特に $n=5$ 迄の図表を與へた。実用上の計算目的には $n=3$ 迄にて充分と思はれるが、尚高次の $\dot{Q}_n(\zeta, Z)$ 函数を必要とする時には次の相乗計算を図式的に施行して之を求める事が出来る。

$$\dot{R}_n(\zeta, Z) = R_\nu(\zeta, Z) * R_\lambda(\zeta, Z) - W_\nu(\zeta, Z) * W_\lambda(\zeta, Z)$$

$$\dot{W}_n(\zeta, Z) = R_\nu(\zeta, Z) * W_\lambda(\zeta, Z) + W_\nu(\zeta, Z) * R_\lambda(\zeta, Z)$$

$$\dot{Q}_n(\zeta, Z) = \dot{R}_n(\zeta, Z) - j \dot{W}_n(\zeta, Z)$$

$$\nu + \lambda = n \quad \nu, \lambda = 1, 2, 3, \text{----}$$

----- (11.1.2)

